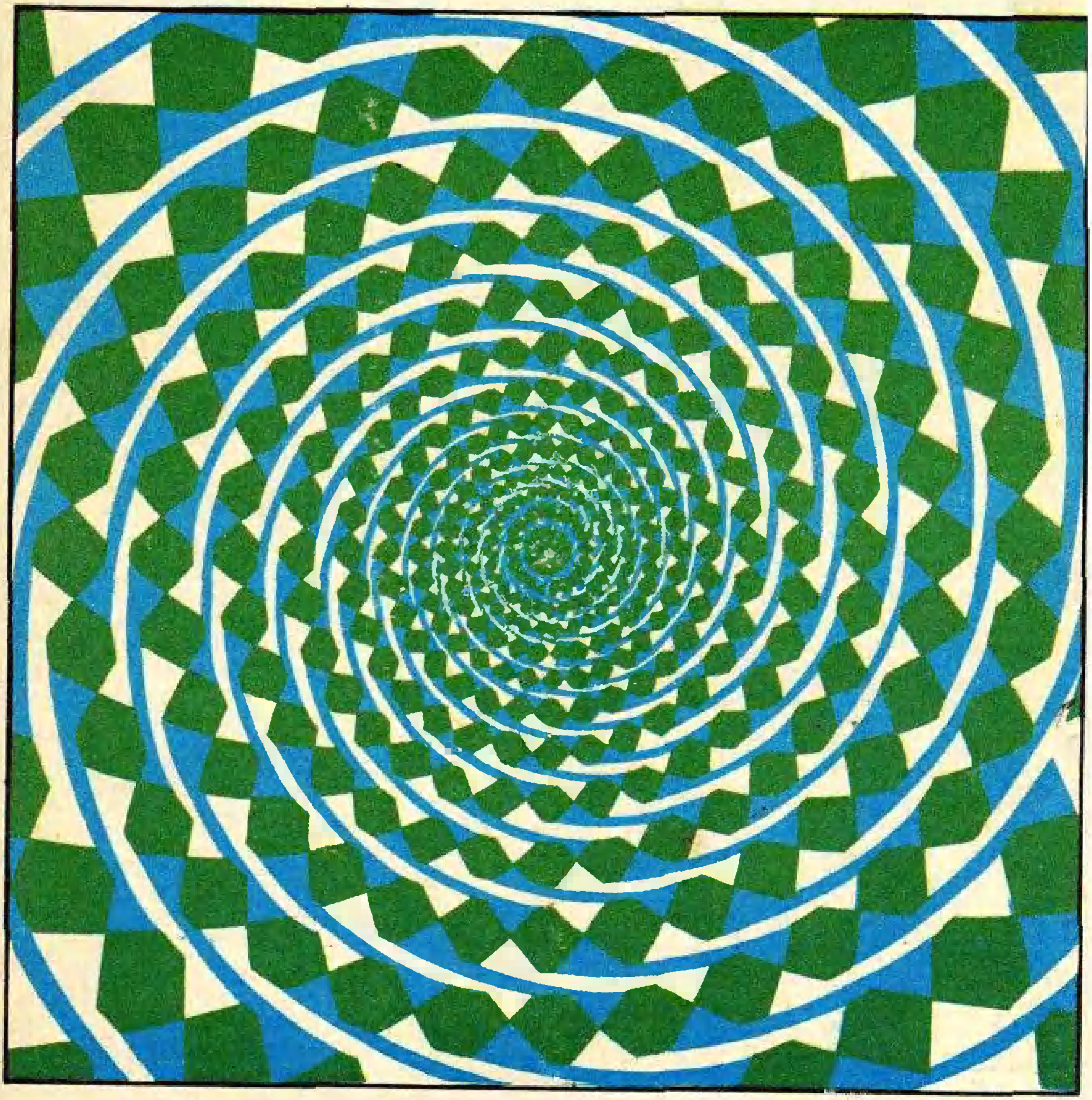
Квант

Научно-популярный физико-математический

6

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



Обеспечить в новом пятилетии:

дальнейшую разработку проблем теоретической и прикладной математики и кибернетики...

развитие исследований по ядерной физике, физике твердого тела и полупроводников, квантовой электронике, физике плазмы, физике низких температур...

Директивы XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 годы

В номере:

Д. Б. Фукс
М. Б. Фукс

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Как выбрать наилучшее рациональное приближение для иррационального числа? Какое, например, из приближений числа $\sqrt{2}$ лучше: $^3/_2$, $^7/_5$ или 1,41? Казалось бы, ответ прост: чем меньше погрешность, тем лучше и приближение. Но все же, видимо, это не совсем так; иначе, почему же, прекрасно зная пять десятичных знаков числа π, мы упорно пишем $\pi \approx 3{,}14$? Дело, конечно, в том, что, подбирая приближение, мы хотим уменьшить не только погрешность, но и знаменатель: чем меньше знаменатель, тем менее громоздка дробь и тем удобнее обращаться с ней — запоминать, подставлять в различные формулы и т. д.

Этому и посвящена наша статья: определить, в какой степени можно удовлетворить два явно противоречащих друг другу требования — найти по возможности более точное и по возможности менее громоздкое рациональное приближение для данного иррационального числа.

§ 1. Коэффициент качества приближения

Прежде всего желательно научиться оценивать качество приближения одним числом (а не двумя: погрешностью и знаменателем). Поскольку мы стремимся уменьшить и погрешность, и знаменатель, то естественно взять за показатель качества приближения их произведение: малость произведения в какой-то степени говорит о малости сомножителей. Так что примем за основу такое определение.

Коэффициентом качества приближения $\frac{p}{q}$ иррационального числа α называется произведение знаменателя q на погрешность $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ *).

*) Сравните со статьями Н. М. Бескина в «Кванте» № 1, 8 за 1970 год, где принята несколько другая терминология.

Итак, мы считаем, что чем меньше коэффициент качества, тем лучше приближение. (Нулю коэффициент качества равняться не может, так как α иррационально и не равно $\frac{p}{q}$.)

Найдем для примера коэффициенты качества трех упоминавшихся приближений числа $\sqrt{2}$. Получим:

$$2\left|\sqrt{2}-3/2\right| \approx 2\times 0{,}086 = 0{,}17,$$
$$5\left|\sqrt{2}-7/5\right| \approx 5\times 0{,}014 = 0{,}07,$$
$$100\left|\sqrt{2}-1{,}41\right| \approx 100\times 0{,}0042 = 0{,}42,$$

так что по нашему критерию самым лучшим является приближение 7/5 *).

Попытаемся доказать теперь какие-нибудь общие теоремы. Совсем легко показать, например, что *для любого q существует приближение $\frac{p}{q}$ числа α с коэффициентом качества, меньшим* $^1/_2$. В самом деле, подберем такое число p, что

$$\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p+1}{q}.$$

Так как α иррационально, оно не является серединой отрезка $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$ (см. рис. 1). Значит, или $\alpha-\frac{p}{q}$, или $\frac{p+1}{q}-\alpha$ меньше половины длины отрезка $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$, то есть меньше $\frac{1}{2q}$.

Таким образом наше утверждение доказано.

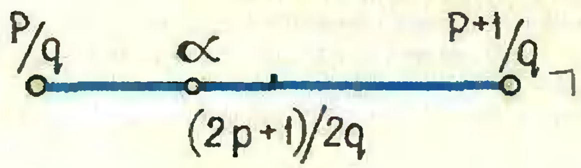


Рис. 1.

Значительно более глубоким фактом является

Теорема 1. *Для любого иррационального числа α и для сколь угодно большого N существует бесконечно много различных дробей $\frac{p}{q}$ с коэффициентом качества, меньшим $\frac{1}{N}$,* то есть с $q\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{N}$.

Эта теорема составляет главный результат нашей статьи. Ее доказательство будет завершено в § 4. Наше доказательство, вероятно, не самое короткое, но мы предпочли его за геометрическую наглядность, а также за то, что оно основы-

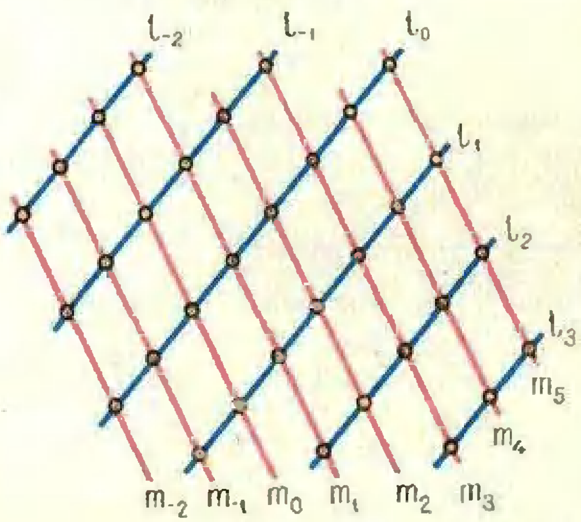


Рис. 2.

*) Мы пренебрегаем, конечно, тем обстоятельством, что обычно в качестве приближений для иррациональных чисел предпочитают десятичные дроби, так как над ними удобнее производить арифметические операции. Именно поэтому столь употребительно, несмотря на большой коэффициент, приближение 1,41.

вается на идеях, которые интересны сами по себе.

Мы докажем эту теорему с помощью так называемых решеток.

§ 2. Решетки

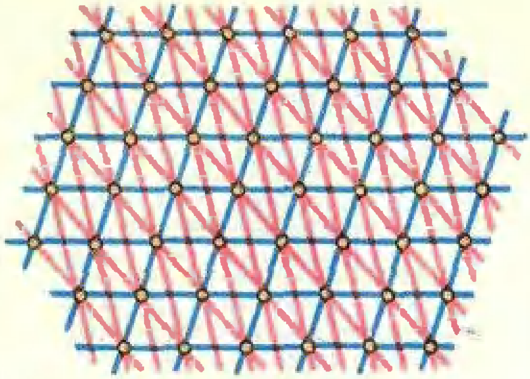


Рис. 3.

Предположим, что на плоскости заданы две пересекающиеся прямые: l_0 и m_0 и, кроме того, зафиксированы два масштабных отрезка: a и b. По обе стороны от прямой l_0 проведем параллельные прямые $l_{\pm 1}$, $l_{\pm 2}$ ... на расстоянии a, $2a$, ... от нее. Аналогично по обе стороны от m_0 на расстоянии b, $2b$, ... проведем прямые $m_{\pm 1}$, $m_{\pm 2}$, ... Отметим все точки пересечения прямых l_i с прямыми m_j. Множество этих точек и называется *решеткой* (рис. 2).

Подчеркнем, что решеткой мы называем множество точек пересечения прямых, не относя к ней самые прямые. Это важно, потому что одна и та же решетка может быть получена из совершенно различных семейств прямых. Так, решетка, изображенная на рисунке 3, получается как при пересечении синих прямых, так и при пересечении красных прямых.

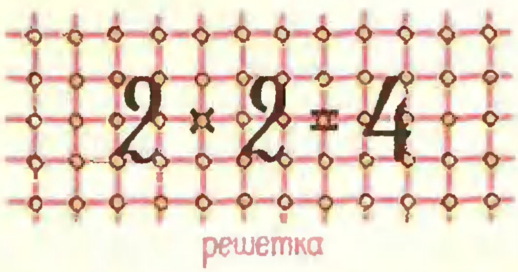
За примерами решеток далеко ходить не надо. Точки пересечения линий в тетрадях «в клеточку» составляют решетку. А такие же точки в тетрадях, в которых пишут первоклассники, решетки не составляют — не одинаковы расстояния между соседними горизонтальными линиями (рис. 4).

Зафиксируем на плоскости семейства прямых l_i, m_j и построенную с их помощью решетку обозначим через R.

Т е о р е м а 2 (свойство параллелограмма). *Если $ABCD$ — параллелограмм и точки A, B, C принадлежат решетке R, то и точка D принадлежит этой решетке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы должны доказать, что точка D лежит на одной из прямых l и на одной из прямых m. Оба утверждения доказываются совершенно одинаково, и мы ограничимся доказательством первого.

Поскольку точки A, B, C принадлежат решетке, то каждая из них лежит на одной из прямых l, скажем, A лежит на l_i, B — на l_j, C — на l_k (см. рис. 5). Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую l_j, из точки D — перпендикуляр DF на прямую l_k. Так как $BA \parallel CD$, $l_j \parallel l_k$ и $AE \parallel DF$ (как перпендикуляры к параллельным прямым), то треугольники BAE и CDF подобны. Так как, кроме того, $BA=CD$, то эти треугольники равны. Следовательно, $AE=DF$. Но длина отрезка AE есть расстояние между



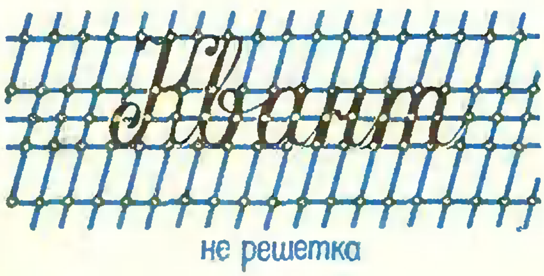


Рис. 4.

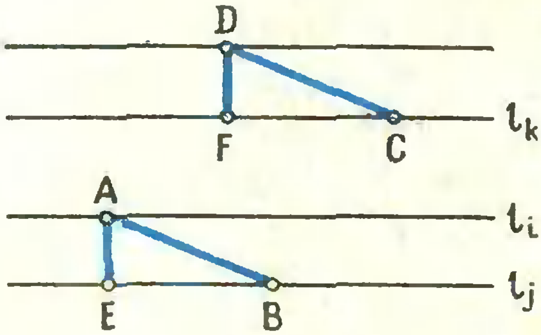


Рис. 5.

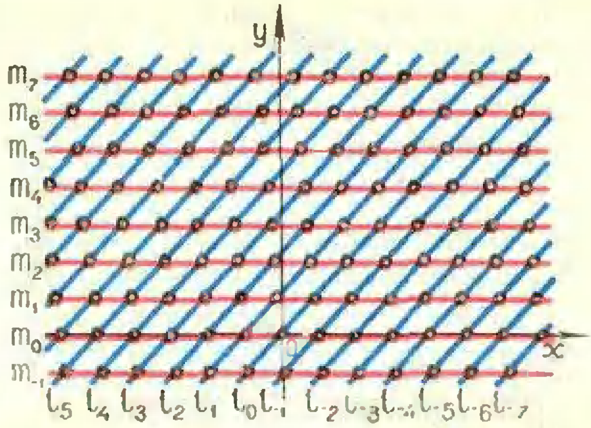


Рис. 6.

прямыми l_i и l_j, то есть $AE=a|i-j|$. Следовательно, прямая, проведенная через точку D параллельно прямым l, находится от l_k на расстоянии $DF=AE=a|i-j|$, кратном a, и эта прямая есть одна из прямых l (более точно — прямая l_{k+i-j}).

Теорема доказана.

Другие свойства решеток нам не понадобятся. Мы приведем некоторые из них без доказательств — для самостоятельного обдумывания.

1. *Если вершины параллелограмма принадлежат решетке R, то площадь этого параллелограмма кратна произведению ab.*

Определение. Параллелограмм, вершины которого принадлежат решетке R, а площадь равна ab, называется *основным параллелограммом* решетки R.

Например, основными являются все параллелограммы, на которые разбивают плоскость прямые l_i, m_j.

2. *Для того чтобы параллелограмм, вершины которого принадлежат решетке, был основным, необходимо и достаточно, чтобы внутри этого параллелограмма и на его ребрах не лежало ни одной точки решетки, кроме вершин параллелограмма.*

3. *Всякий параллелограмм на плоскости служит основным для одной и только одной решетки.*

§ 3. Связь между решетками и рациональными приближениями

Обратимся теперь к нашей исходной цели: нахождению приближений для иррационального числа α. Сначала мы свяжем с числом α некоторую специальную решетку.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат. В качестве прямых m_0, $m_{\pm1}$, $m_{\pm2}$, ... мы возьмем прямые, параллельные оси Ox и проходящие через точки (0,0), (0, ±1), (0, ±2),... (уравнение прямой m_q: $y=q$). В качестве прямой l_0 мы возьмем прямую, проходящую через точки (0,0) и (α, 1); ее уравнение: $x=\alpha y$. Наконец, в качестве прямых $l_{\pm1}$, $l_{\pm2}$, ... мы возьмем прямые, параллельные прямой l_0 и проходящие через точки (±1,0), (±2,0), ... (уравнение прямой l_p: $x=\alpha y-p$). Эта решетка изображена на рисунке 6. Закрепим за этой решеткой обозначение «R».

Оказывается, что вопрос о том, насколько хорошим приближением для числа α является $\frac{p}{q}$, можно свести к вопросу о том, где расположена на плоскости точка пересечения прямых l_p и m_q. В самом деле, найдем координаты этой точки. Это можно сделать как элементарно-геометрическими средствами, так и решая совместно уравнения этих прямых:

$$\begin{cases} x = \alpha y - p & (l_p), \\ y = q & (m_q). \end{cases}$$

Получаем, что координаты точки пересечения таковы: $\alpha q - p$, q. Мы видим, что ордината этой точки равна знаменателю дроби $\frac{p}{q}$. Абсцисса же ее равна $\alpha q - p = q\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$. Таким образом, модуль абсциссы совпадает с коэффициентом качества приближения, и она положительна, если $\alpha > \frac{p}{q}$ (или $\frac{p}{q}$ — приближение «с недостатком»), и отрицательна, если $\alpha < \frac{p}{q}$ (или $\frac{p}{q}$ — приближение «с избытком»). Заметим, что так как α иррационально, то заведомо $\alpha \neq \frac{p}{q}$, и, значит, ни одна точка решетки, кроме точки (0,0), на ось Oy не попадает.

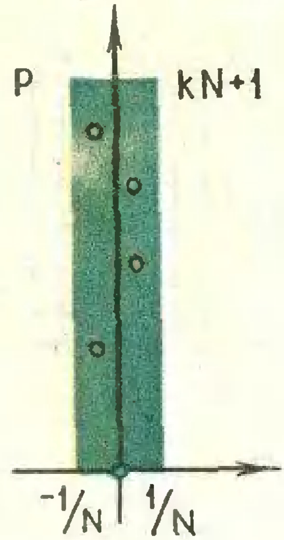


Рис. 7.

Итак, *каждой точке нашей решетки, лежащей выше оси Ox* (мы ограничиваемся случаем $q > 0$), *отвечает некоторое рациональное приближение числа* α; *при этом расстояние этой точки от оси Ox есть знаменатель приближения; расстояние ее от оси Oy есть коэффициент качества приближения; если точка лежит правее* (*левее*) *оси Oy, то отвечающее ей приближение есть приближение с недостатком* (*с избытком*).

§ 4. Доказательство основной теоремы

Мы докажем более сильное предложение, чем основная теорема.

Теорема 3. *Для любых натуральных чисел N, k существует по крайней мере k различных дробей $\frac{p}{q}$ таких, что*

$$\text{а) } q \leqslant Nk, \qquad \text{б) } q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N}.$$

(То, что из теоремы 3 следует теорема 1, очевидно: k может быть сколь угодно большим, так что всего приближений с коэффициентом качества, меньшим $1/N$, существует бесконечное множество).

Доказательство. Посмотрим, что означает наше утверждение для решетки R, построенной в § 3. Как мы видели, приближениям отвечают точки этой решетки, причем знаменатели равны ординатам, а коэффициенты качества — модулям абсцисс этих точек. Итак, нам нужно доказать, что существуют k точек решетки R, содержащихся внутри прямоугольника P, заданного неравенствами: $-\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$, $0 < y < kN + 1$ (см. рис. 7).

Для доказательства рассмотрим более широкий прямоугольник $\tilde{P}$: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < kN + 1$ (рис. 8). Внутри этого прямоугольника

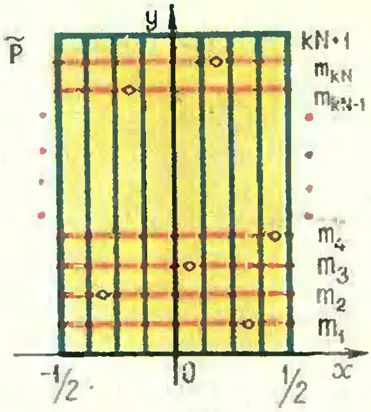


Рис. 8.

лежат kN точек решетки R. В самом деле, на каждой из прямых $y=1$, $y=2, \ldots$, $y=kN$ точки решетки лежат с промежутками, равными 1; поэтому ровно по одной точке решетки лежит на отрезке каждой из этих прямых, заключенном в прямоугольнике $\tilde{P}$ (на вертикальные стороны прямоугольника $\tilde{P}$ точки решетки не попадают, так как их абсциссы иррациональны). Разобьем прямоугольник $\tilde{P}$ на N равных прямоугольников $p_1, p_2, \ldots, p_N$ с основанием $\frac{1}{N}$. Ясно, что либо в каждом из них лежит ровно k точек решетки, либо в одном из них (скажем, в p_m) лежит по крайней мере $k+1$ точек решетки (скажем $A_0, A_1, \ldots, A_k$).

В первом случае доказываемая теорема получается сразу: прямоугольник P содержит, очевидно, один из прямоугольников p_i, а значит, в нем имеются k точек решетки.

Во втором случае проделаем следующее построение (рис. 9). Для определенности предположим, что A_0 — самая нижняя из точек $A_0, \ldots, A_k$. Соединим точку A_0 с точкой O и проведем из точек $A_1, \ldots, A_k$ отрезки, равные и параллельные A_0O.

Пусть это будут отрезки $A_1B_1, \ldots, A_kB_k$.

Точки $B_1, \ldots, B_k$ принадлежат решетке R; в самом деле, фигура $A_0OB_iA_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$—параллелограмм (так как $A_0O \parallel A_iB_i$, $A_0O = A_iB_i$) и точки A_0, O, A_i принадлежат R; значит, по свойству параллелограмма (теорема 2) и B_i принадлежит R.

Точки $B_1, \ldots, B_k$ лежат в прямоугольнике P. В самом деле, при $1 \leqslant i \leqslant k$ отрезки A_0A_i и OB_i равны и параллельны, и, значит, имеют равные проекции на ось Ox. Но отрезок A_0A_i лежит в прямоугольнике p_m и его проекция на ось Ox меньше $\frac{1}{N}$. Значит, абсцисса точки B_i по модулю меньше $\frac{1}{N}$, то есть B_i лежит в P. Итак, $B_1, \ldots, B_k$ суть k точек решетки, лежащих в прямоугольнике P. Теорема доказана.

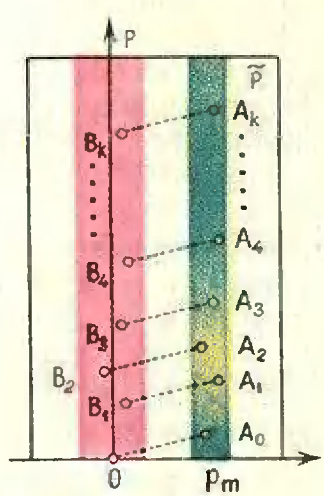


Рис. 9.

§ 5. Заключение

Из теоремы 3 можно получить и другие весьма любопытные следствия.

Например, такое:

Т е о р е м а 4. *Существует бесконечное множество дробей $\frac{p}{q}$ таких, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме 3 примем $k=1$. Тогда, согласно этой теореме, для каждого N существует приближение $\frac{p}{q}$ числа α такое, что $q \leqslant N$ и

$$q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N}.$$

Раз $q \leqslant N$ и, следовательно, $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{N}$, то $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$, поэтому

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Осталось убедиться в том, что таких дробей бесконечно много. Если бы их было лишь конечное число, то мы могли бы выбрать из них ближайшую к α, то есть была бы такая дробь $\frac{p_0}{q_0}$, что $\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right| < \frac{1}{q_0^2}$, но ни для какой дроби, более близкой к α, чем $\frac{p_0}{q_0}$, подобное неравенство уже не имело бы места. Тогда мы бы взяли число N большим, чем $\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right|^{-1}$ и нашли бы, как и выше, с помощью теоремы 3 такое приближение $\frac{p}{q}$ числа α, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

и в то же время

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N} < \left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right|.$$

Мы пришли к противоречию.

Доказанная теорема приводит к мысли, что, может быть, мы можем оценивать качество приближений более строго, приняв за коэффициент качества приближения $\frac{p}{q}$ число $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Как видно из теоремы 4, любая иррациональность допускает бесконечно много приближений, у которых такой коэффициент качества меньше единицы.

Однако аналог теоремы 1 при таком определении коэффициента качества уже неверен. Наиболее сильным результатом, которого удается здесь достичь, является классическая теорема Гурвица — Бореля. Она формулируется так:

для любого иррационального числа α существует бесконечно много приближений $\frac{p}{q}$ с

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

При этом число $\sqrt{5}$ не может быть в этой формулировке увеличено: существуют иррациональные числа, для которых есть лишь конечное число приближений с коэффициентом качества (в новом смысле), меньшим $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Возникает интересный вопрос: что же это за иррациональные числа, которые хуже других приближаются рациональными? Оказывается, что таких чисел бесконечно много; например, одно из них равно $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доказательство теоремы Гурвица — Бореля и ее уточнений производится теми же средствами, что и доказательство нашей теоремы 1, только требуется чуть более тонкий анализ решетки R. Мы расскажем об этом в нашей следующей статье.

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ И ТРИОДЫ

М. А. Федоров

Б этой статье рассказывается о работе полупроводниковых диодов и триодов (транзисторов), замечательных электронных устройств, изобретение которых стало возможным только после кропотливого изучения свойств определенного типа веществ — полупроводников. Сконструированные несколько десятков лет назад, эти устройства в настоящее время стали незаменимыми элементами огромного количества физических и радиотехнических приборов.

Проводники, полупроводники и диэлектрики

Прежде чем говорить о полупроводниковом диоде и транзисторе, мы расскажем о том, что такое полупроводники, какова их внутренняя структура и какими они обладают свойствами.

Из большого числа известных в природе полупроводников наиболее изучены кремний и германий. Это элементы, стоящие в таблице Менделеева под номерами 14 и 32.

Если говорить строго, то полупроводники — это диэлектрики, только очень слабые диэлектрики. Слабые в том смысле, что их нетрудно превратить в проводники. Для этого существует несколько способов. Основные из них: облучение, бомбардировка полупроводников быстрыми частицами, нагревание и добавление в полупроводник соответствующих примесей.

Как известно, диэлектрики не проводят электрического тока, то есть являются изоляторами. Если на концах диэлектрического образца создать разность потенциалов и измерить ток, то он будет равен нулю. Это объясняется тем, что внутри образца нет свободных заряженных частиц, например, электронов, которые под действием электрического поля перемещались бы с одного конца образца на другой и таким образом создавали бы ток. Атомы диэлектрика прочно удерживают все свои электроны и уж если отпускают их от себя, то только поменявшись с соседом на другой электрон.

Иное дело в металлах. Основная масса электронов и там ведет себя подобно электронам в диэлектрике. Но некоторые из них, те, которые находятся далеко от положительно заряженных ядер и потому слабо с ними связаны, при образовании кристалла получают такую свободу, что могут бродить по всему кристаллу. Эти электроны называются свободными электронами, или электронами проводимости. Если поместить металл в электрическое поле, то эти свободные электроны (поскольку они обладают отрицательным зарядом) движутся в сторону, противоположную направлению электрического поля. Электрическое поле, словно ветер, сдувает их на границу образца. Гальванометр, подключенный к такому образцу, зарегистрирует электрический ток.

Итак, диэлектрик потому не проводит электрический ток, что в нем нет свободных носителей заряда, которые могли бы под действием электрического поля свободно двигаться по образцу.

Но такие заряды мы сами можем создать. Один из способов — подействовать на атом диэлектрика каким-нибудь подходящим «инструментом», например, квантом света — фотоном. Мы облучаем диэлектрик обычным светом, а еще лучше — рентгеновскими лучами, так как они обладают большей энергией, и выбиваем электроны из атомов, образующих кристалл. Таким путем в диэлектрике можно создать свободные электроны и превратить его в проводник. Ясно, что энергия, нужная для освобождения электрона, зависит прежде всего от того, из каких атомов образован кристалл и как эти атомы расположены в кристалле. Другими словами, эта энергия различна для различных кристаллов. Минимальная энергия, необходимая для того, чтобы оторвать электрон от атома и превратить его в свободный, называется энергетической щелью данного диэлектрика. Если на кристалл падает излучение, энергия квантов которого ниже, чем минимальная энергия, необходимая для освобождения электрона, то ни один из электронов не будет выбит и диэлектрик так и останется изолятором.

Различие между диэлектриками и полупроводниками как раз и заключается в величине энергетической щели. Диэлектрики с достаточно малой энергетической щелью называются полупроводниками. Энергетическая щель у полупроводников примерно в 10 раз меньше, чем у ярко выраженных диэлектриков, таких, как, например, алмаз. Ширина энергетической щели для алмаза равна 7 *эв*, тогда как для германия мы имеем 0,72 *эв*, а для кремния 1,1 *эв* *). Таким образом, чтобы полупроводник превратить в проводник, достаточно сообщить его электронам относительно небольшую энергию.

Теперь представьте себе, что мы нагреваем диэлектрик. При повышении температуры средняя энергия электронов увеличится, и многие из них будут иметь энергию, достаточную для преодоления энергетической щели. В результате становится все больше свободных электронов, причем появление свободных электронов происходит тем чаще, чем выше температура, и уж, конечно, чаще всего у тех кристаллов, у которых меньше энергетическая щель, то есть у полупроводников. Потому полупроводники и называют полупроводниками, что при достаточно высоких температурах (например, комнатных $\sim 300^\circ$ К) они являются проводниками, а при понижении температуры превращаются в диэлектрики. Транзисторный приемник перестает работать в трескучий мороз, так как полупроводники, использованные в его транзисторах, превращаются в самые настоящие изоляторы.

Электроны и дырки

Пусть каким-либо образом мы выбили электрон из атома диэлектрика и он улетел от этого атома. В кристалле в этом месте образуется нехватка электрона или, как говорят, дырка. Интересно то, что дырка не стоит на месте, а начинает двигаться и вообще ведет себя подобно положительно заряженной частице. Вот как это происходит.

Когда у какого-то атома не хватает электрона, то электрон может пе-

*) 1 электрон-вольт (1 *эв*) — энергия, приобретаемая электроном при прохождении разности потенциалов в 1 вольт. 1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

рескочить с соседнего атома, имеющего ровно столько электронов, сколько нужно (рис. 1, *а*). Но тогда нехватка электронов обнаруживается на соседнем атоме, то есть дырка перемещается к соседнему атому (рис. 1, *б*). Конечно, на самом деле это электроны с заполненных атомов перескакивают на соседние незаполненные, но удобнее говорить о движении дырки. Дырка все-таки одна, а отражает движение многих электронов. Движение дырки подобно движению положительно заряженной частицы, потому что, если под действием электрического поля электроны движутся в одну сторону, то их «нехватка» движется в другую.

Будет полезно подчеркнуть разницу между поведением металлов и полупроводников в электрическом поле. Ток в металле создается только свободными электронами. Металл так устроен, что в нем всегда имеется то или иное их количество. В полупроводнике же при достаточно низких температурах свободных электронов нет. Эти свободные электроны

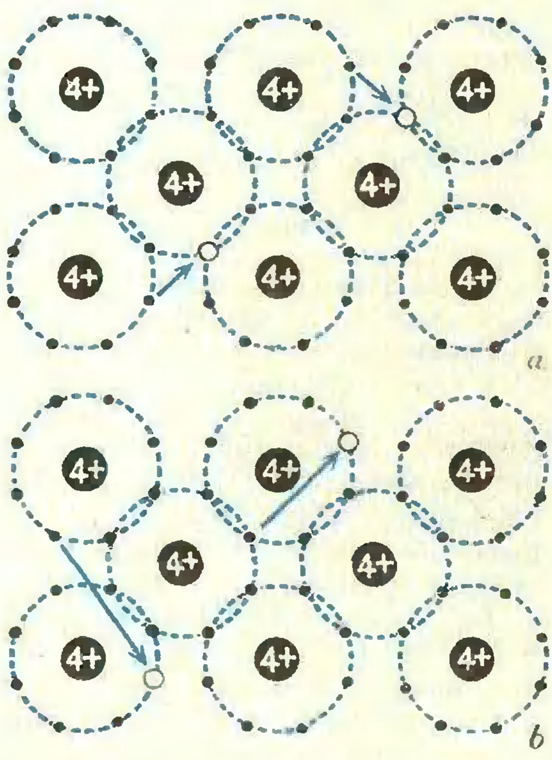


Рис. 1.

можно создать. Но при этом, отрывая электрон от атома и предоставляя ему свободу, мы создаем и дырку. В дальнейшем эти электроны и дырки движутся независимо друг от друга. Получается так, что ток в полупроводнике складывается из тока электронов и тока дырок.

Может случиться так, что свободный электрон и дырка встретятся, то есть что электрон при своем движении по кристаллу встретит атом, у которого как раз не хватает электрона. Он займет это свободное место, и в этот момент и электрон, и дырка исчезнут. В этом случае говорят, что произошла рекомбинация. Вы вправе спросить, а зачем же тогда создавать электроны и дырки, если они рано или поздно вот так просто друг друга уничтожат? Во-первых, при наложении электрического поля электроны и дырки как частицы, имеющие разные заряды, движутся в противоположные стороны, и мы можем зарегистрировать ток, который они создают еще до того, как рекомбинируют. Во-вторых, мы не из каждого атома выбиваем электроны, а, например, из каждого тысячного. Мы создаем при этом значительный ток (поскольку в каждом кубическом сантиметре кристалла примерно 10^{23} атомов) и оставляем достаточную свободу для движения электронов и дырок.

Полупроводниковые кристаллы выращиваются чрезвычайно чистыми. Это тоже делается для того, чтобы движению электронов и дырок ничего не мешало.

Доноры и акцепторы

Существует и такой способ создания свободных электронов в полупроводнике. Представим себе кристалл германия, в котором один из атомов германия заменен атомом мышьяка. У атомов германия валентность равна 4, а у атомов мышьяка — 5. Когда атом мышьяка оказывается в окружении атомов германия, пятый

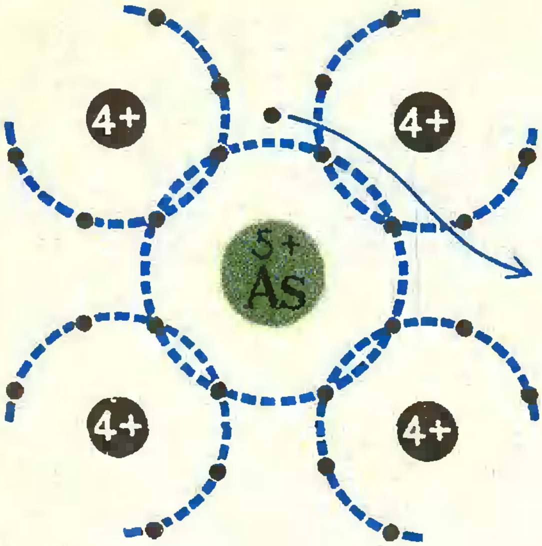


Рис. 2.

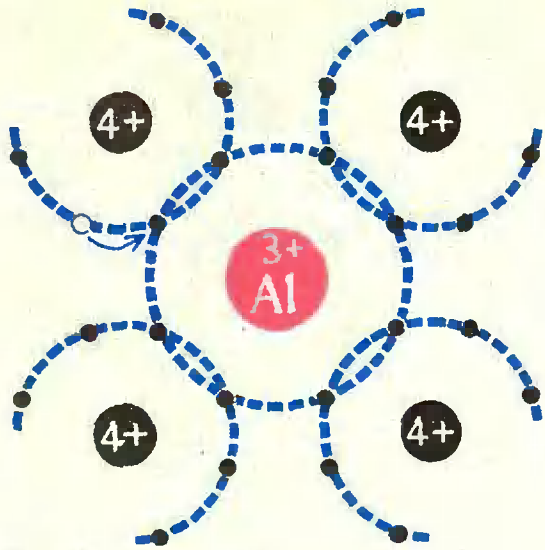


Рис. 3.

электрон мышьяка связан с ним очень слабо (рис. 2). Чтобы его оторвать, достаточно энергии 0,1 *эв*, которая не превышает тепловой энергии кристалла. Таким образом, один из электронов атома мышьяка становится свободным и странствует по кристаллу. Вводя в полупроводник примеси, имеющие более высокую валентность, мы всегда можем получить достаточное количество отрицательных носителей тока. В этом случае примесные атомы называются донорами, а сами полупроводники, содержащие примеси донорного типа, называют полупроводниками *n*-типа.

Можно внедрить в кристалл германия трехвалентные атомы, например, алюминия. Атому алюминия, для того, чтобы прочно сидеть в кристалле германия, необходимо иметь четыре внешних электрона, поэтому он захватывает недостающий электрон у соседних атомов германия (рис. 3). В кристалле образуется дырка. Примесные атомы такого типа называются акцепторами *), а полупроводники — полупроводниками *p*-типа.

Полупроводники *n*- и *p*-типа имеют соответственно избыточное количество отрицательных или положительных носителей тока. Избыточное — по сравнению с теми электронами и дырками, которые создаются тепловыми возбуждениями. Однако общий заряд каждого из полупроводников, конечно, равен нулю, поскольку их кристаллы образуются из нейтральных атомов. Отрицательный заряд электронов в полупроводнике *n*-типа компенсируется положительно заряженными донорными центрами, закрепленными в узлах кристаллической решетки, например, атомами мышьяка. В полупроводнике *p*-типа положительный заряд дырок гасится отрицательным зарядом акцепторных центров.

Переходы между полупроводниками

Возьмем два различных образца германия (*p*- и *n*-типа) и приложим их друг к другу *). Нас интересует, что будет происходить на границе раздела (рис. 4).

До тех пор, пока не был создан контакт между образцами, электроны в *n*-области и дырки в *p*-области, подходя к границе образца, отражались от поверхности и возвращались в глубь полупроводника. Как

*) От корня «акцепт» — принимать.

*) В таком случае говорят, что создан *p* — *n*-переход.

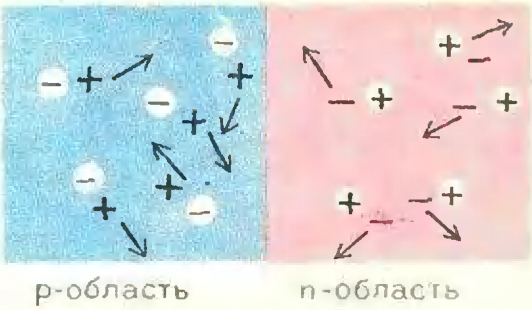


Рис. 4.

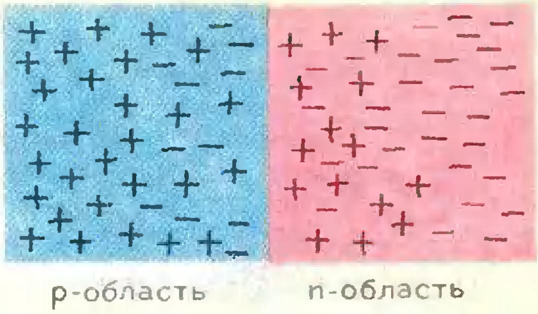


Рис. 5.

только образовался переход, ситуация изменилась. Электроны из *n*-области, движущиеся по направлению к границе раздела, имеют возможность перескочить в *p*-область. Аналогично дырки из *p*-области просачиваются в *n*-область. Оба эти процесса действуют в одном направлении: они стремятся зарядить германий *n*-типа положительно, а германий *p*-типа отрицательно. В самом деле, *n*-область, полный заряд которой до образования перехода был равен нулю, теперь заряжается положительно, отдавая отрицательно заряженные электроны в *p*-область. Положительно заряженные дырки, приходя из *p*-области, только способствуют этому. Германий же *p*-типа и за счет прихода электронов, и за счет ухода дырок приобретает отрицательный заряд.

Однако весь этот процесс рано или поздно должен остановиться. Когда германий *n*-типа зарядится положительно, а германий *p*-типа — отрицательно, то образуется как бы конденсатор, и на границе возникнет электрическое поле, направленное из *n*-области в *p*-область (рис. 5). А это значит, что, например, электроны из *n*-области уже не смогут больше уходить в *p*-область. Сильное электрическое поле на границе заставит их повернуть обратно. То же самое можно сказать и в отношении дырок. Возникшее электрическое поле понизит их шансы уйти в *n*-область. Итак, наступит равновесие, при котором германий *n*-типа будет заряжен положительно, германий *p*-типа — отрицательно, а на границе будет сильное электрическое поле, направленное из *n*-области в *p*-область.

Если принять потенциал электрического поля на границе за нуль, то потенциал *n*-области больше нуля, а потенциал *p*-области меньше нуля (рис. 6), как будто это пластины заряженного конденсатора. Потенциал резко изменяется в той области, где существует электрическое поле, т. е. на границе раздела между германием *p*- и *n*-типа. Разность потенциалов в *p*—*n*-переходе равна той энергии, которую необходимо иметь электрону для перехода из *n*-области в *p*-область, или дырке для перехода из *p*-области в *n*-область. Что касается дырок в *n*-области и электронов в *p*-области, то если им посчастливится случайно попасть на границу раздела, электрическое поле только подтолкнет их в другую область. Однако если такое случается, то это приводит к уменьшению заряда и *n* и *p*-областей, т. е. к уменьшению пере-

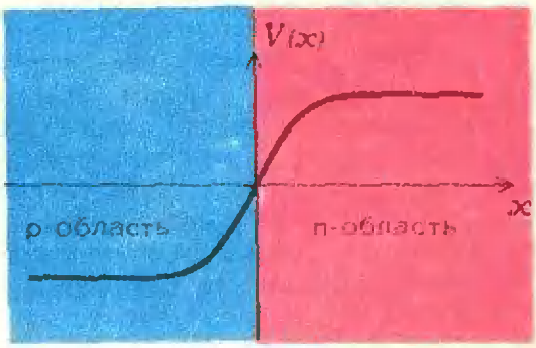


Рис. 6.

пада потенциала на границе и к уменьшению электрического поля. Но тогда найдутся электроны в n-области и дырки в p-области, которые обладают достаточной энергией для преодоления уменьшившегося потенциального барьера *). Они проскочат через барьер, и равновесие будет восстановлено. Мы видим, что равновесие между p- и n-областями динамическое. Между ними все время происходит обмен электронами и дырками, но этот обмен эквивалентен: средний заряд p- и n-областей остается неизменным и, следовательно, остаются неизменными перепад потенциала и электрическое поле на границе. Однако суммарный ток через границу равен нулю. Это равновесие можно нарушить, только создавая на концах $p—n$-перехода внешнюю разность потенциалов. Рассмотрим теперь этот случай.

Полупроводниковый диод

Образец с $p—n$-переходом обладает одним важным свойством: он может работать в качестве диода, то есть системы, пропускающей ток только в одном направлении.

Посмотрим, что происходит, если мы включаем $p—n$-переход в электрическую цепь, то есть создаем на концах образца внешнюю разность потенциалов. Возможны два случая. Либо перепад потенциала на границе $p—n$-перехода увеличивается, либо уменьшается. Равновесие между p- и n-областями, осуществляемое при помощи обмена электронами и дырками, нарушается, и средний ток через границу раздела отличен от нуля. Величина этого тока будет зависеть от того, увеличивает или уменьшает внешнее напряжение тот перепад потенциала, который существует в переходе сам по себе.

Если внешнее напряжение увеличивает скачок потенциала на границе, то ясно, что ток через переход чрезвычайно мал. Например, в p-области дырочный ток равен нулю, так как увеличивается величина потенциального барьера, который нужно преодолеть дыркам. Другими словами, увеличивается работа, которую им нужно совершить против сил электрического поля при переходе через границу раздела. Электронный ток в p-области тоже очень мал из-за малого количества электронов. В n-области, где преобладают отрицательные носители, ситуация аналогичная: электрическое поле, отталкивающее электроны от границы, возросло, а дырки не могут обеспечить достаточного тока, поскольку в n-области их ровно столько, сколько электронов в p-области, то есть очень мало.

Если же внешнее напряжение уменьшает величину скачка потенциала, то в p-области найдется большое число дырок, обладающих энергией, достаточной для преодоления ступеньки потенциала, и дырочный ток будет пропорционален числу дырок в p-области, которое очень велико. Точно так же электронный ток будет пропорционален числу электронов в n-области. В результате ток через переход будет очень большим.

Все эти процессы в целом легко понять следующим образом. При смещении равновесия, то есть при увеличении или уменьшении перепада потенциала, обмен электронами и дырками между p- и n-областями нарушается и возникает отличный от нуля суммарный ток через $p—n$-переход. Этот ток во всех случаях стремится восстановить равновесие, то есть уменьшить перепад потенциала, если он возрос, и наоборот. Однако этого ему не удается сделать, так как переход включен в электрическую цепь. Средний заряд, переносимый с одной стороны $p—n$-перехода на другую, не задерживается в образце, а уходит дальше по цепи. Равновесие так и остается нарушенным.

Итак, при включении $p—n$-перехода под напряжение, обмен заря-

*) См. «Квант» № 5, 1971 г., стр. 8—16.

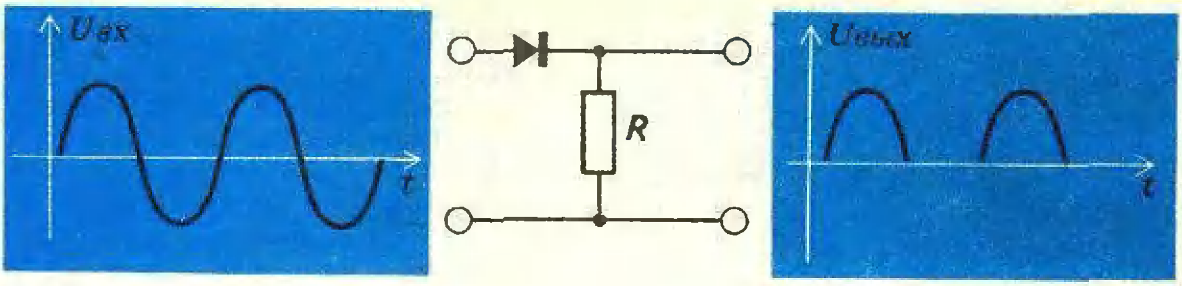


Рис. 7.

дами между p- и n-областями изменяется и через переход протекает ток. Этот ток очень велик при одном знаке внешнего напряжения и очень мал при другом.

Свойство полупроводникового диода пропускать ток только в одном направлении используется, например, для создания выпрямителей — устройств, преобразующих переменный ток в постоянный.

Простейшая схема такого выпрямителя изображена на рисунке 7. Для анализа работы этой схемы нам важен только тот факт, что при одном знаке напряжения сопротивление диода (R_D) практически равно нулю (когда он пропускает огромный ток), а при другом знаке напряжения диод практически не проводит тока и, следовательно, его сопротивление очень велико.

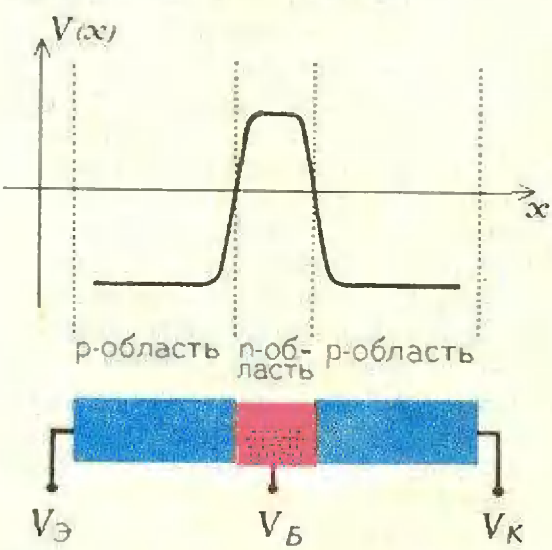


Рис. 8.

Предположим теперь, что диод пропускает ток только слева направо, то есть он открыт, когда напряжение на входе больше нуля, и закрыт, когда оно отрицательно.

При $U_{вх}>0$ общее сопротивление цепи

$$R_D+R \approx R,$$

и напряжение на выходе будет практически равно входному.

При $U_{вх}<0$ сопротивление диода бесконечно ($R_D \gg R$), и, следовательно, падение напряжения на сопротивлении R практически равно нулю. Напряжение на выходе равно нулю. Таким образом, наша система преобразовывает знакопеременное напряжение в знакопостоянное.

Транзистор

Теперь мы можем рассмотреть транзистор — систему, которая объединяет в себе два только что рассмотренных перехода. p—n—p-транзистор — это изготовленный, например, из германия небольшой брусок, составленный из трех участков: p-область, n-область и опять p-область (рис. 8). Каждый переход в транзисторе ведет себя так, как описано выше. В частности, в каждом переходе должен наблюдаться перепад потенциала — падение из n-области в каждую из p-областей, так что общее распределение потенциала будет таким, как показано на рисунке 8.

В работающем транзисторе каждая из трех областей подключена к источнику внешнего напряжения. К n-области, которая называется базой, подведен небольшой отрицательный потенциал, а правая p-область (коллектор) подключена к значительно большему отрицательному потенциалу. На рисунке 9 распределение потенциала в работающем p—n—p-транзисторе изображено сплошной линией.

Рассмотрим сначала, что происходит с положительными носителями тока — дырками, потому что именно их поведение управляет работой p—n—p-транзистора. Легко понять, что из левой p-области (эмиттера) на базу пойдет ток положительных носителей, поскольку потенциал базы будет теперь уменьшен на величину $V_Б$ и дыркам нужно преодолеть меньший потенциальный горб, чем это было раньше. Таким образом, дырки будут «эмиттироваться» из p-области в n-область. Что будет с ними дальше? Могло бы показаться, что этот ток вытечет из n-области через контакт, подключенный к базе. Но этого не произойдет, поскольку n-область делается достаточно узкой для того, чтобы дырки проскакивали в правую p-область на коллектор; тем более, что при переходе с базы на коллектор потенциал резко падает и на дырки действует сильное электрическое поле, направленное в сторону коллектора. Обратный путь дыркам закрыт. При переходе с коллектора на базу им нужно было бы преодолеть слишком высокий барьер.

Итак, почти весь дырочный ток, вышедший из эмиттера, собирается в области коллектора и только небольшая его часть (доли процента) идет на базу. Естественно, ток через эмиттер равен сумме токов базы и коллектора. Если теперь слегка менять потенциал $V_Б$, то ток через эмиттер будет меняться очень сильно, следовательно, очень сильно будет меняться и ток через коллектор, ведь они примерно равны с точностью до мизерного тока базы. Перед нами усилитель: при помощи небольшого тока $I_Б$, проходящего через электрод

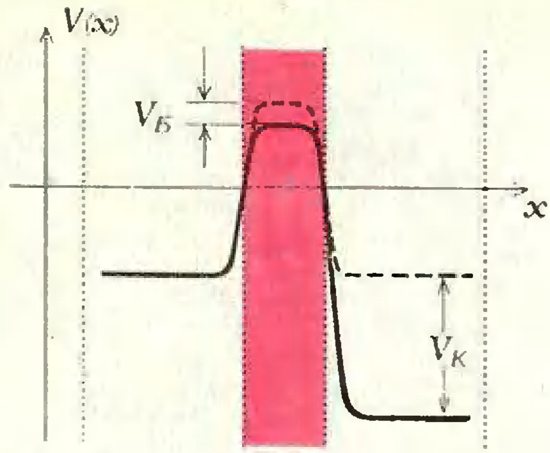


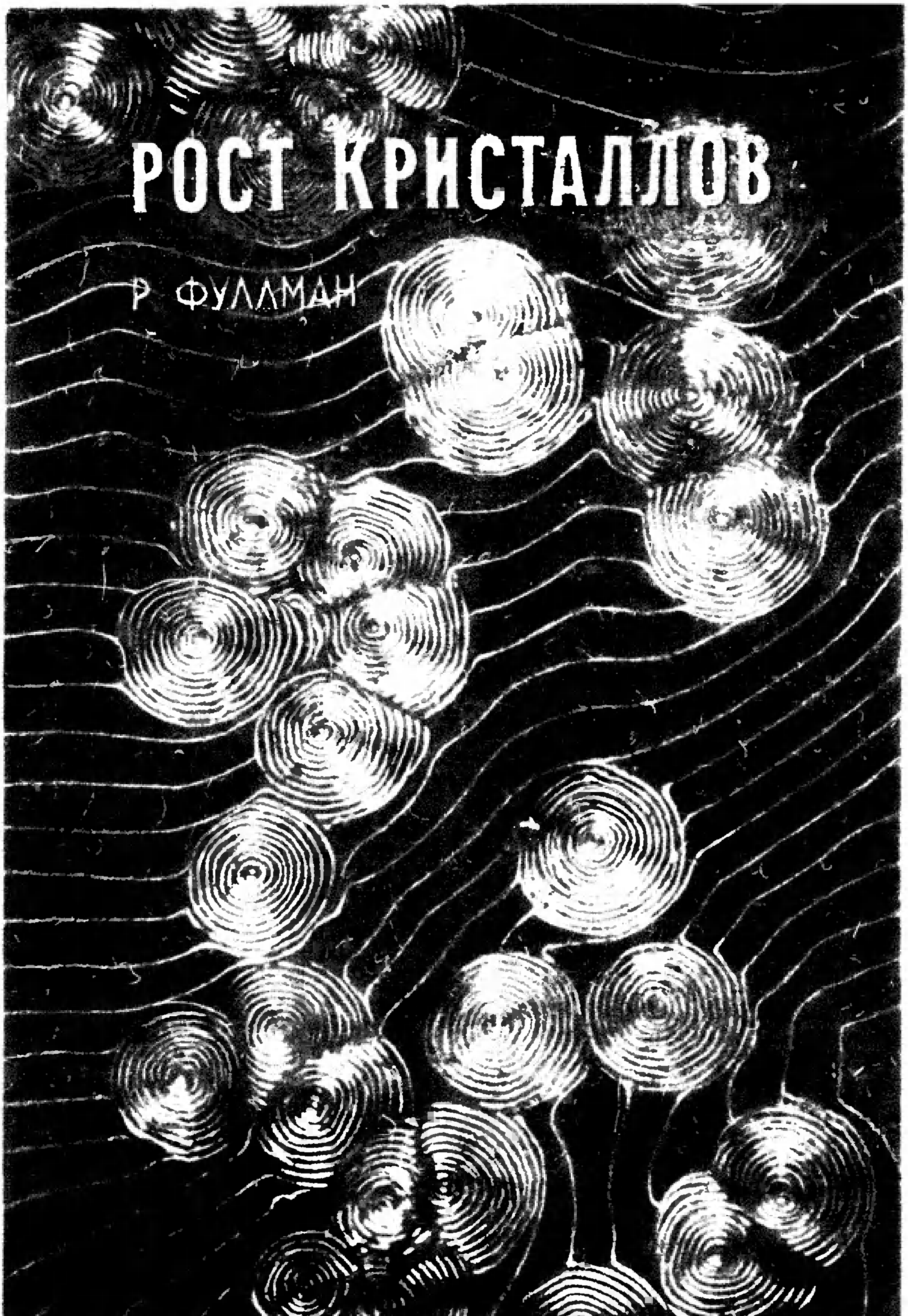
Рис. 9.

базы, мы получим примерно в 100 раз больший ток через коллекторный электрод.

Остается рассмотреть, что происходит с электронами. Электронный ток с базы на коллектор очень мал, поскольку в этом направлении электронам приходится преодолевать очень высокий потенциальный барьер. Но зато при переходе электронов с базы на эмиттер существует подталкивающее электрическое поле, и электронный ток в этом направлении может достигать заметной величины. Это обстоятельство работает против нас, поскольку увеличивает полный ток через базу при заданном коллекторном токе, в результате чего уменьшается усиление. Поэтому транзистор конструируется так, чтобы уменьшить этот ток до минимума.

Все, что рассказано о p—n—p-транзисторе, в равной мере применимо к n—p—n-транзистору, если только переменить знаки потенциалов электродов.

В заключение нужно сказать, что применение полупроводников, конечно, не ограничивается только диодами и транзисторами. Существует очень много других устройств, работа которых основана на тех или иных свойствах полупроводников.



Кристаллы, растущие по спирали на поверхности карбида кремния, увеличенные в 250 раз. Источником каждого спирального нароста служит винтовая дислокация.

Известно, что кристаллы можно выращивать. Но как они растут? Что заставляет присоединяться к ним новые частицы? В каком направлении растут кристаллы? Теории роста кристаллов посвящена статья, помещенная ниже. Она была опубликована в журнале «Scientific American». Перевод сделан В. К. Федяниным.

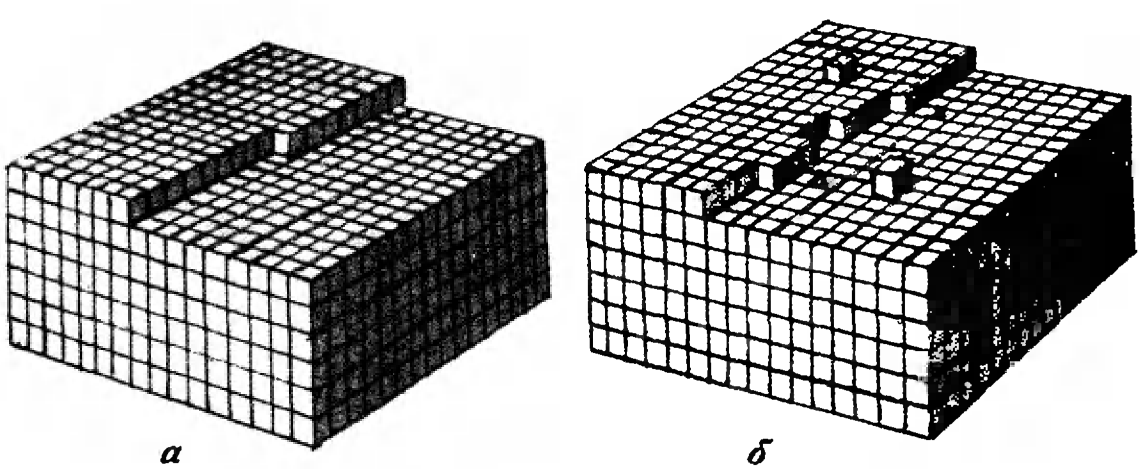
Каким образом атомы или молекулы пара либо раствора образуют строгую архитектуру твердого тела? Многое может быть понято, если предположить, что они ведут себя при этом как кирпичи, укладываемые по спиральному скату.

Все металлы и почти все основные твердые материалы, используемые в современной технике, построены из кристаллов. Следовательно, понимание, каким образом строятся кристаллы — как они растут, является существенным аспектом науки о материалах.

Устройство кристалла не так безупречно, как это выглядит на первый взгляд. Двадцать пять лет назад физики думали, что имеют ясные представления о том, как растут кристаллы. Но потом простые опыты посеяли в них сомнения. Это привело к серии неожиданных открытий и к новой картине устройства кристаллов.

Само построение кристалла ничем не отличается от построения стенки из кирпичей. Из кучи атомов или молекул, собранных совершенно беспорядочно (то есть в виде газа или жидкости), берут один за другим подходящие кирпичи и складывают их в упорядоченную структуру. Если изобразить эти единицы (атомы или молекулы) маленькими кубиками и предположить, что они выстраиваются друг за другом, а затем остаются неподвижными на своих местах, то идеальный кристалл в процессе построения будет выглядеть так, как это изображено на рис. 1, *а*.

Однако атомы и молекулы при обычных условиях имеют кинетическую энергию и находятся в беспорядочном тепловом движении. Они могут



а *б*

Рис. 1. На левом рисунке изображен растущий идеальный кристалл в некоторый момент времени. Здесь полностью игнорируется тепловое движение его молекул. Правый рисунок дает представление о влиянии такого движения. Каждый кубик на этих весьма схематичных рисунках представляет отдельную молекулу.

прилипнуть к поверхности кристалла и тотчас же вновь ее покинуть. Таким образом, даже в идеализированной картине рост кристаллов происходит совсем не так упорядоченно, как укладка кирпичей. Рост кристаллов должен идти примерно так, как показано на рисунке 1, *б*. Кубик, опускающийся на поверхность кристалла, связывается с ней прочно только в том случае, когда по меньшей мере три из его шести граней сцепляются с кубиками, уже сидящими на кристалле. Более того, чтобы можно было гарантировать рост какого-либо слоя, он должен состоять из определенного минимального числа кубиков.

В том случае, когда слишком большая часть составляющих его кубиков находится у углов или на краях, они не смогут удерживать новые кубики, опускающиеся на поверхность.

Скорость перехода молекул из твердого тела в окружающий его пар зависит от интенсивности молекулярного движения — то есть от температуры. Скорость возвращения из пара в твердое тело зависит от концентрации молекул в паре, то есть от давления пара. Для каждой температуры имеется некое «давление насыщенного пара», при котором скорости перехода из твердого тела в пар и обратно уравновешиваются. В этих условиях кристалл не будет расти. Он может расти только в том случае, когда пар перенасыщен.

Далее эта модель роста кристалла предполагает, что после того, как заполнен слой на поверхности, дальнейший рост кристалла затрудняется: нужна более высокая степень перенасыщенности, чтобы начать заполнять новый слой.

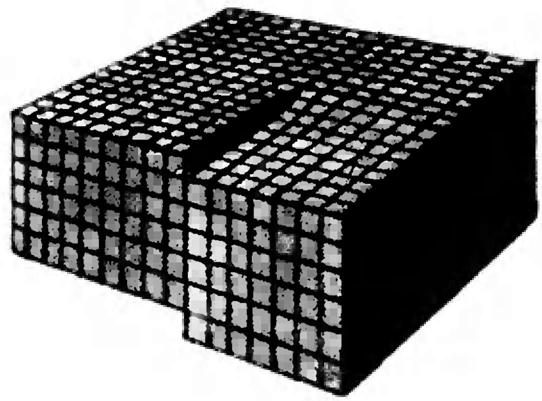
Именно в этом пункте и потерпела крах классическая теория роста кристаллов. Расчеты показали, что образование достаточно больших островков центров конденсации, чтобы началось построение новых слоев и кристалл мог продолжать расти, требует давлений, превышающих давление насыщенного пара на величину от 25 до 50 процентов. Однако в 1931 году физики М. Волмер и В. Шультце сумели вырастить кристаллы при пересыщенности пара всего лишь в один процент. Теория предсказывала, что при такой степени пересыщенности кристалл мог бы расти лишь со скоростью в 10^{1000} раз меньшей той, с которой он рос на самом деле. Это, по-видимому, одно из самых рекордных расхождений между теорией и экспериментом.

Каким же образом начинается и продолжается такая сравнительно легкая застройка новых кристаллических плоскостей? Физики проделывали расчеты вновь и вновь, но прийти в рамках старой модели к результатам, имеющим какой-то смысл, они, как ясно теперь, и не могли. Это продолжалось до 1949 года, пока английский физик Ф. Франк не предложил новую модель. Франк заметил, что рост кристалла можно довольно просто понять, если предположить, что в процессе застройки его кристаллические плоскости не располагаются независимо одна над другой, а образуют спиральную структуру. Это было бы возможно, если бы кристалл обладал таким отклонением от идеальной структуры, которое называется «винтовой дислокацией».

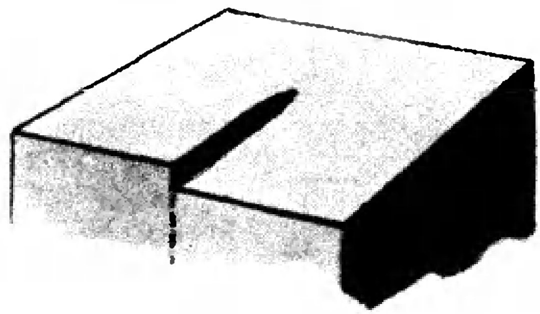
Представим себе кристаллическую решетку из двух примыкающих секций, в которой по всей глубине кристалла кристаллические слои одной из частей (правой на рис. 2) находятся ниже соответствующих слоев другой части. Почему такое нарушение структуры мы называем винтовой дислокацией? Пусть крошечный наблюдатель обходит внутренний край разреза по поверхности кристалла, начиная свой путь на верхнем его конце. Он закончит его уровнем ниже. И это происходило бы при каждом последующем обходе, перемещающем таким образом нашего наблюдателя по спирали в глубь кристалла. Модель, которую мы описали, называется правой винтовой дислокацией, потому что путь по спирали в глубь кристалла все время заставляет поворачивать вправо.

Как только Франк уяснил себе картину кристалла с дислокацией, он сразу же понял, что наличие дислокации постоянно создает на поверхности открытую ступеньку. Атомы и молекулы всегда могут с легкостью пристроиться к ней и продолжать строить кристалл, никогда не начиная нового ряда. Эта ступенька, по мере прибавления новых строительных единиц, распространяется по поверхности кристалла. Однако при этом она загибается (рис. 2). Чтобы понять причину этого, рассмотрим цепочку конькобежцев, которая поворачивается вокруг одного из своих концов. Если они хотят сохранить строй, то тем конькобежцам, которые находятся ближе ко второму концу цепочки, придется бежать быстрее, чем тем, которые находятся ближе к центру вращения. Ведь они должны бежать по кругу большего радиуса. В нашем случае со ступенькой на поверхности кристалла существенно то, что ее внешний край застраивается не быстрее области в центре. Кирпичи укладываются с более или менее постоянной скоростью вдоль всей длины ступеньки. В этом случае по мере застройки вращение внешней части ступеньки вокруг центра происходит недостаточно быстро и ступенька изгибается, образуя спираль.

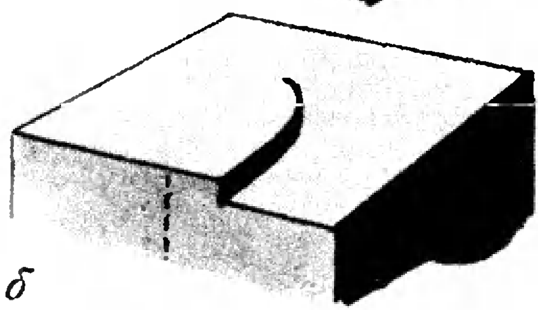
Была ли правильной новая картина роста кристаллов? Подтверждение не заставило себя долго ждать. На одной из конференций, где обсуждались вопросы этой теории, были продемонстрированы микрофотографии поверхности кристалла, на которых обнаруживались предсказанные картины спиральных ступенек. Это вполне отвечало на вопрос. Последовавшие затем интенсивные обследования кристаллов под микроскопом обнаружили разнообразные картины роста, которые могли быть объяснены лишь



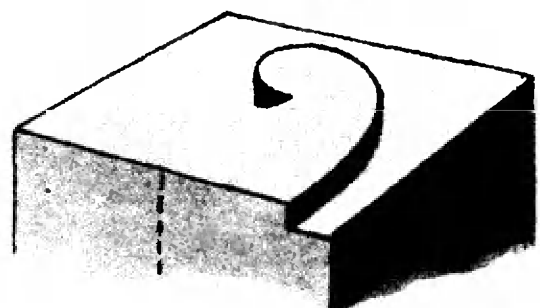
а



б



в



г

Рис. 2. На рисунке *а* показано возникновение винтовой дислокации, которая приводит к спиралевидному росту кристалла, проиллюстрированному на последующих рисунках *б*, *в*, *г*.

теорией винтовых дислокаций и были до этого ею предсказаны.

В природе редко возникают идеально правильные кристаллы. Они содержат обычно по меньшей мере одну дислокацию. Это необходимое условие роста при небольшом пересыщении. В общем же случае кристалл имеет много дислокаций. Присутствие различных дислокаций усложняет картину роста. Так, например, две близко расположенные дислокации, одна из которых правая, а другая левая, могут привести к ступеньке, закрепленной на обоих своих концах (рис. 3, *а*). По мере того, как на такую ступеньку садятся новые кирпичи, она приобретает полукруглую форму (рис. 3, *б*). В итоге мы придем к кольцеобразной ступеньке (рис. 3, *в*). Это и есть полностью застроенная кристаллическая поверхность на таком кристалле. Однако тем временем на верхушке исходной ступеньки образуется новая ступенька, которая служит ядром для застройки нового ряда (рис. 3, *г*). По мере того, как этот процесс повторяется, кристалл разрастается в набор плотноупакованных кругов, а не спиралей, как это было при наличии одной винтовой дислокации. Фотографию такого кристалла вы видите на рисунке 4. Ступеньками здесь являются прямоугольники, а не круги, по той причине, что условия роста этого кристалла на периферии и в центре слегка различны.

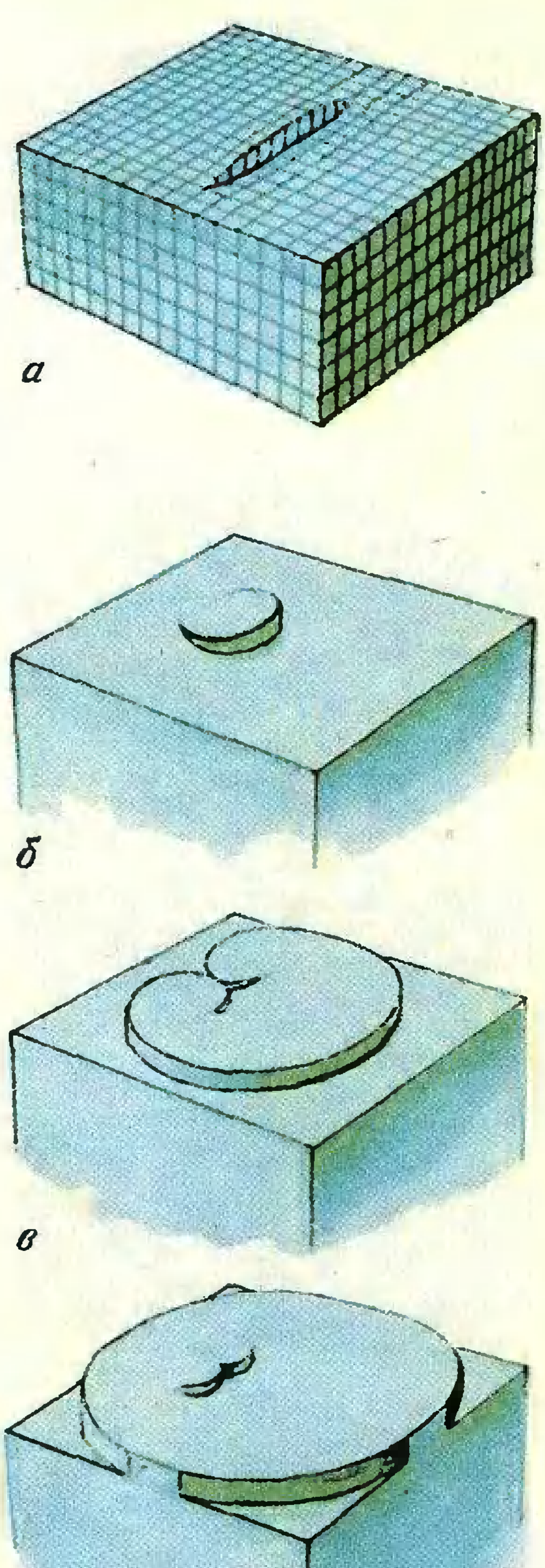


Рис. 3. Замкнутые петли могут возникнуть из таких ступенек, которые начинаются и кончаются на поверхности кристалла (рисунок *а*) и которые обусловлены соседством двух дислокаций: правой и левой. Такая ступенька закреплена на обоих своих концах и может расти только разбухая. Рисунок *б* показывает начинающую выворачиваться разбухающую ступеньку. На следующем рисунке показан тот момент роста, когда левая и правая выступающие части сомкнулись. На последнем рисунке видно, как внутренние части отделились от заполненного слоя. Видна вмятина в этой ступеньке, которая будет заполнена, как только начнет заполняться молекулами площадка, образовавшаяся наверху выросшей из первоначальной площадки петли.

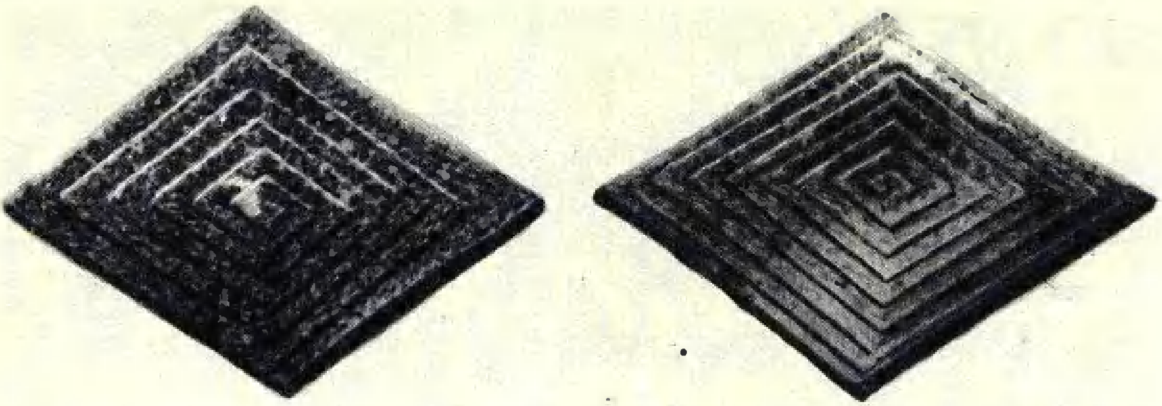


Рис. 4. Четырехрядная ступенька, образовавшаяся из-за присутствия четырех очень близко располагающихся друг к другу дислокаций одного и того же типа. Серия из большего числа дислокаций дает многослойные ступеньки.

Высоту кристаллической ступеньки можно измерить. Оказалось, что некоторые кристаллы имеют ступеньки высотой во много рядов атомов (рис. 5). Теория объясняет появление таких многорядных ступенек наличием группы близко расположенных дислокаций, которые к тому же либо все правые, либо левые. От каждой дислокации ступенька получает по одному ряду атомов. На рисунке 6 показан кристалл иодистого кадмия со ступенькой высотой во много рядов. Короткая прямая линия у центра спирали — это совокупность винтовых дислокаций.

Теория помогла разобраться и в других особенностях кристаллической структуры, которые долго мистифицировали кристаллографов. Речь идет об упаковке кристаллических плоскостей кристалла. Чтобы разобраться в этом, нужно несколько уточнить форму строительных единиц кристалла, которые до сих пор мы полагали просто кирпичиками. Эти стро-

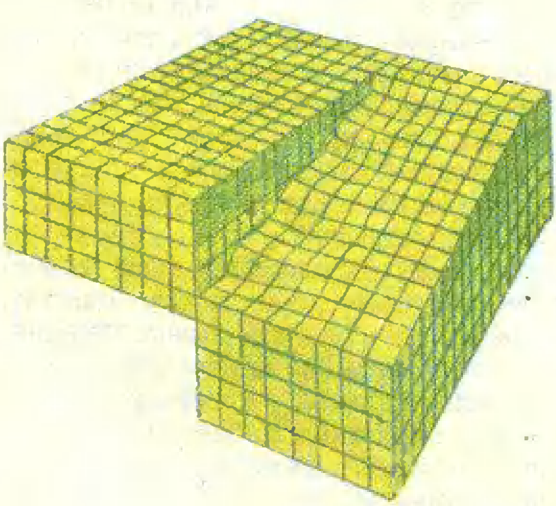


Рис. 5. Микрофотографии позволяют выявить ступеньки роста на поверхности кристалла парафина.

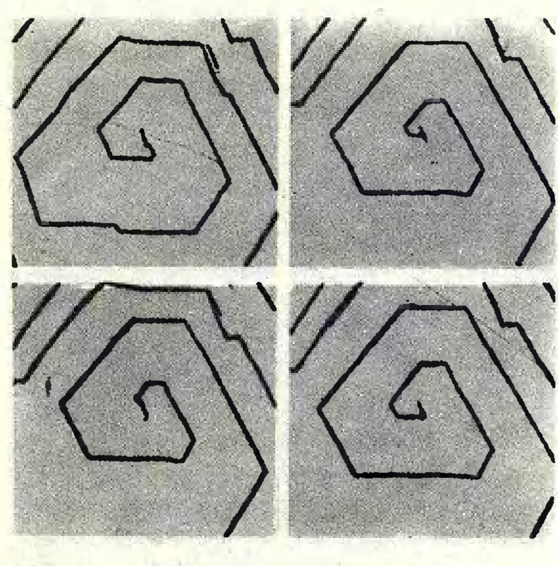


Рис. 6. Раскручивающаяся спираль в четырех последовательных положениях на поверхности кристалла иодистого кадмия. Такая ступенька, высота которой составляет много слоев, порождена большой группой плотноупакованных дислокаций.

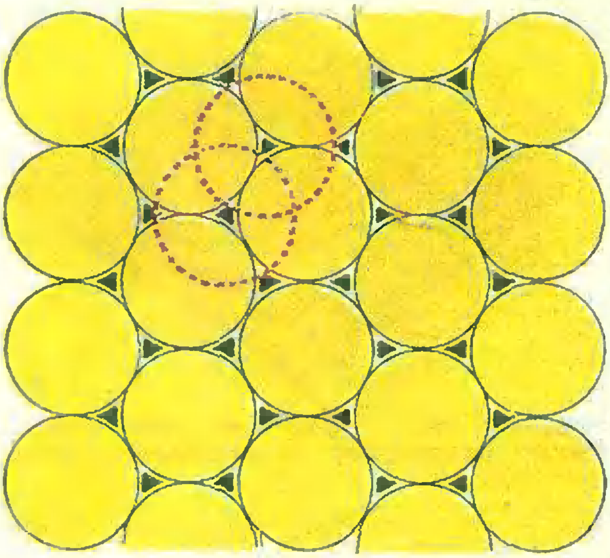


Рис. 7. На диаграмме плотноупакованные молекулы представлены кругами. Треугольники указывают две возможные позиции для молекул следующего слоя.

ительные блоки кристалла — атомные или молекулярные ячейки — не кирпичики, а скорее похожи на шарики. Определенные кристаллы обладают плотноупакованной структурой, что означает, что эти сферические блоки располагаются не непосредственно один над другим, а наподобие пушечных ядер (или биллиардных шаров) в пирамиде, в которой каждый шар попадает в углубление между ближайшими соседями. Ясно, что каждый последующий слой в такой пирамиде может плотно подгоняться к предыдущему при двух возможных положениях шаров. На рисунке 7 эти позиции шаров верхнего слоя указаны символами ▲ и ▼. Когда один слой кладется на другой, условия плотной упаковки требуют, чтобы все шарики этого слоя располагались либо в положениях, помеченных индексом ▲, либо в положениях, помеченных индексом ▼. Следующий за ним слой опять может подгоняться так, что его шары располагаются либо в одной, либо в другой позиции. Пусть слои уложены так, что их шарики располагаются последовательно, то в одном, то в другом положениях. Такая последовательность слоев обозначается символически ▲▼. Однако кристаллы зачастую упаковываются намного более сложным образом. Так, например, одна из разновидностей кристалла карбида кремния характеризуется следующим расположением: ▲▲▼▼▼▲▲▼▼▼ и так далее. Здесь повторяется группа, состоящая из пяти слоев. В некоторых типах кристаллов карбида кремния повторяется группа, состоящая из 29 слоев.

Каким образом можно передать информацию о нужном расположении шариков в слое на такое большое расстояние? Каким образом каждый шарик в тридцатом слое попадает в то же самое положение, что и соответствующий шарик первого слоя? Классическая кристаллография не могла предложить какое-либо объяснение и постулировала наличие неких неизвестных дальнодействующих сил между молекулами. Теория роста кристаллов, использующая теорию дислокаций, предложила простой, хотя и неполный ответ. Наличие серии винтовых дислокаций может привести к появлению ступеньки высотой во много слоев. Эта ступенька и становится той единицей повторения в структуре кристалла, которая все время воспроизводится по мере его роста. Теория не объясняет лишь одного существенного аспекта реальной ситуации: в случае карбида кремния найдено всего лишь 14 вариаций картины кристаллической структуры, тогда как теория приводит к возможности возникновения почти неограниченного числа таких структур.

Каким образом возникает начальная винтовая дислокация? Ответ на этот вопрос пока еще весьма не однозначен. Почти все кристаллы начинают вырастать из малого инородного ядра. Некоторые из этих ядер могут иметь поверхностные неоднородности, на которых возникает винтовая дислокация, распространяющаяся на весь растущий кристалл. Другие кристаллы могут приобрести дислокации по мере своего роста. Дислокации могут возникнуть и на захваченных частичках грязи.

Л. Г. АСЛАМАЗОВ

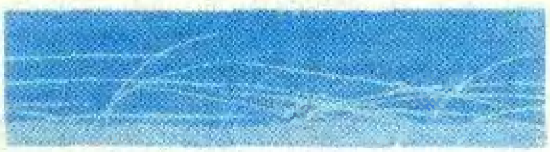
Снежные заносы

Участки железных или шоссейных дорог, проходящие в ложбинах, заносятся снегом, даже если нет снегопада. Почему это происходит? На первый взгляд ответ ясен: снег переносит ветер. Однако, чтобы детально разобраться в механизме этого процесса, потребовалось целое исследование.

В 1936 году английский физик Бэнгольд изучал перенос песка ветром в аэродинамической трубе.

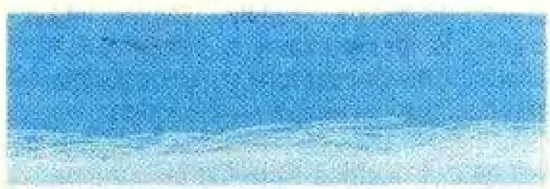
Оказалось, что если скорость ветра меньше некоторой скорости v_1, то песок не движется. При скорости ветра, большей чем v_1, но меньшей некоторой другой скорости v_2, песок также может оставаться в покое. Но если при этом в неподвижную массу песка откуда-нибудь падает песчинка, от ее удара подскакивает вверх несколько других песчинок. Эти песчинки увлекаются ветром, падают, приводят в движение другие песчинки, и в результате песок переносится по ветру. При скорости ветра, большей чем v_2, песчинки поднимаются вверх, образуя песчано-воздушный поток довольно значительной, но уменьшающейся кверху плотности. О траекториях песчинок дает представление рисунок 1.

Теперь можно объяснить, почему снег в ветреную погоду заполняет выемки. В месте углубления поток расширяется (это сразу становится видным по картине линий тока на рисунке 2), и поэтому скорость его падает. В результате равновесие между увлекаемыми вверх и падающи-



а

б



в

Рис. 1.

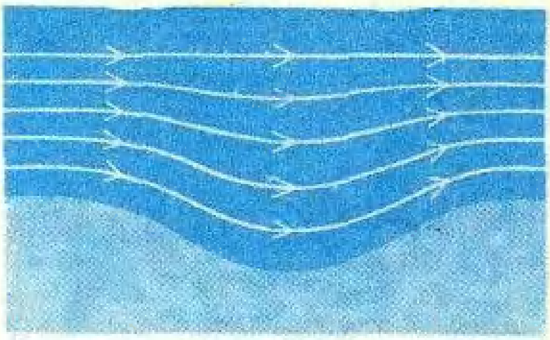


Рис. 2.

ми вниз частицами нарушается: падает больше частиц, чем поднимается, и углубление постепенно заполняется снегом.

Аналогичные процессы происходят и в том случае, когда снег, переносимый ветром, встречает на своем пути какое-нибудь препятствие, например дерево. Перед стволом дерева с той его стороны, откуда дует ветер, возникает восходящее движение воздуха. Оно приводит к тому, что с наветренной стороны ствола и с боков на поверхности снега образуется глубокая выемка. Перед этой выемкой и немного позади ствола, где скорость ветра меньше, образуется, наоборот, возвышение.

Описанное явление используют для защиты участков дорог, проходящих в ложбинах, от заноса. На определенном расстоянии перед выемкой или ложбиной с той стороны, откуда дует ветер, устанавливают забор из дощатых щитов. За щитами образуется спокойная зона с равномерным слабым ветром, в которой полностью отлагается весь увлекаемый ветром снег.

Так же объясняется и движение песчаных дюн. Ветер достаточной силы, набегающий на песчаную дюну, поднимает песок с наветренной стороны. На подветренной стороне, где скорость ветра меньше, песок падает вниз. В результате с течением времени дюны постепенно перемещаются в направлении ветра — «кочуют».

НЕ ВЕРЬ ГЛАЗАМ СВОИМ

На страницах нашего журнала («Квант» № 10, 1970) мы уже писали о зрительных иллюзиях.

А вот еще один любопытный пример такого обмана зрения. На обложке журнала нарисованы концентрические окружности. Однако из-за фона, состоящего из цветных спиралей, линии окружностей, местами прерванные, воспринимаются глазом как спирали.

Воспользовавшись циркулем, вы без труда убедитесь, что здесь действительно изображены окружности.

Любопытно, что если освещать рисунок короткими вспышками света, то при определенной продолжительности вспышки иллюзия пропадает.

Такая же иллюзия возникает и при разглядывании рисунка, помещенного внизу. Окружности, изображенные здесь, также выглядят спиралями.

Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ

А. Л. Тоом

В первом номере «Кванта» были опубликованы задачи вступительной контрольной работы в Заочную математическую школу. ЗМШ получила около 6000 писем от восьмиклассников. Около 2500 из приславших решения приняты в ЗМШ и ее филиалы.

В этом номере мы публикуем решения наиболее трудных задач.

Условия задач

5. О треугольнике ABC были сделаны 4 утверждения:
1) треугольник ABC прямоугольный;
2) $\angle A = 30°$; 3) $AB = 2BC$; 4) $AC = 2BC$.
Известно, что два из этих утверждений верны, а два других — неверны. Найти периметр треугольника ABC, если $BC = 1$.

6. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить, какой знак имеет число c.

7. Про точки A, B, C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC.

9. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

10. Можно ли выписать девять чисел 1,2,3,..., 9 по кругу в таком порядке, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Жители города Правдин всегда говорят правду, а жители города Лгунов всегда лгут.

В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

А (обращаясь к *Б* и *В*): «Я не был на матче. Скажите, кто выиграл?»

Б: «*Г* сказал мне, что их команда проиграла».

В: «Наша команда выиграла».

Г (садясь в автобус, идущий в другой город, и обращаясь к *А*): «Поедем вместе, *А*, ведь мы из одного города».

А: «Вы ошибаетесь, *Г*. Я живу здесь. Это *В* из вашего города».

Определить, кто из какого города, где происходит матч и какая команда выиграла.

12. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 *км*, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 *км*, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 *км*. Сколько автобусов при этом его обогнало? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.)

Решения задач

5. Нам сказано, что из четырех утверждений какие-то два верны, а другие два неверны, но не сказано, какие именно верны, а какие — нет. Поэтому рассмотрим несколько случаев. В каждом таком случае мы будем предполагать, что какие-то два определенные утверждения верны, а другие два неверны. Чтобы не пропустить какой-нибудь случай, сначала выясним,

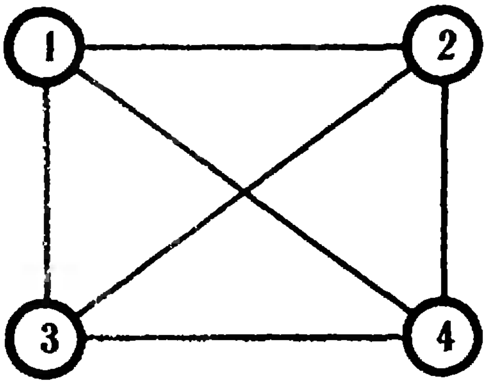


Рис. 1.

сколько их, пользуясь схемой на рисунке 1. На этой схеме каждые две из четырех цифр 1,2,3,4 соединены.

Ясно, что случаев ровно столько, сколько отрезков, соединяющих цифры, то есть шесть. Рассмотрим их все по порядку.

Чтобы указать, какой случай мы рассматриваем; будем называть только номера верных утверждений. Например, «случай 1.2» здесь означает: случай, в котором предполагается, что утверждения 1 и 2 верные (а 3 и 4 неверные).

Случай 1.2. Поскольку $\angle A = 30°$, то прямой угол — либо B, либо C. Если $\angle B$ прямой, то $AC = 2BC$, чего не должно быть, так как утверждение 3 в этом случае неверно. Если $\angle C$ прямой, то $AB = 2BC$, что также противоречит условию. Итак, случай 1.2 невозможен.

Случай 1.3. Угол A не может быть прямым, так как против него лежит не наибольшая сторона. Если $\angle C = 90°$, то $\angle A = 30°$, чего не может быть в этом случае. Значит, $\angle B = 90°$. Тогда утверждения 2 и 4 неверны. Значит, такой случай возможен. Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{5}$, а периметр равен $3 + \sqrt{5}$.

Случай 1.4. Разбирается аналогично случаю 1.3. Возможен, если $\angle C = 90°$. Периметр равен $3 + \sqrt{5}$.

Случай 2.3. Если $\angle A = 30°$ и $AB = 2BC$, то $\angle C = 90°$, что противоречит условию.

Случай 2.4. Аналогично случаю 2.3 невозможен.

Случай 3.4. Утверждения 1.2 неверны. Значит, этот случай возможен. Периметр равен 5.

Ответ. а) $3 + \sqrt{5}$; б) 5.

6. Поскольку квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, то $b^2 - 4ac < 0$, откуда $ac > \frac{b^2}{4}$. Докажем, что $c(a + b + c) > 0$.

Действительно,

$$c(a + b + c) = ac + bc + c^2 > \frac{b^2}{4} + bc + c^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 \geq 0.$$

Поскольку в положительном произведении один множитель $a + b + c$ отрицателен, то и другой множитель c отрицателен. Итак, $c < 0$.

Вариант решения. Известно, что если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ ни при каком x не равен нулю, то его знак — один и тот же при всех x. Заметим, что число $a + b + c$ — это значение нашего трехчлена при $x = 1$, а число c — это его значение при $x = 0$. Значит, эти два числа имеют один и тот же знак. Поскольку $a + b + c < 0$, то и $c < 0$.

7. Докажем требуемое от противного. Предположим, что точка A не лежит на отрезке BC, и придем к противоречию с условием. То есть докажем, что тогда неверно, что «для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM». Иными словами, найдем такую точку M на плоскости, что отрезок AM не меньше каждого из отрезков BM и CM. Рассмотрим два случая.

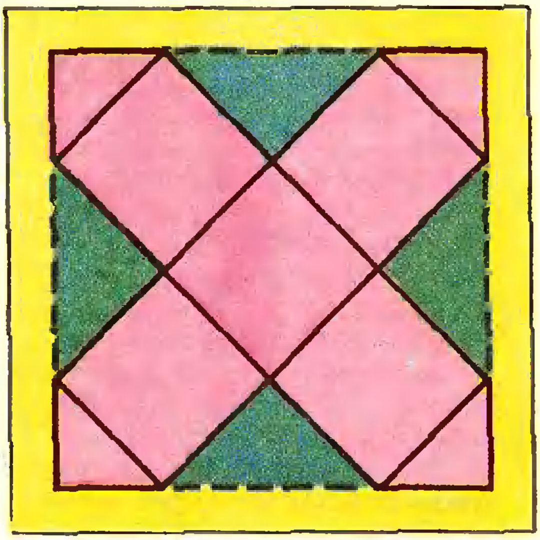


Рис. 2.

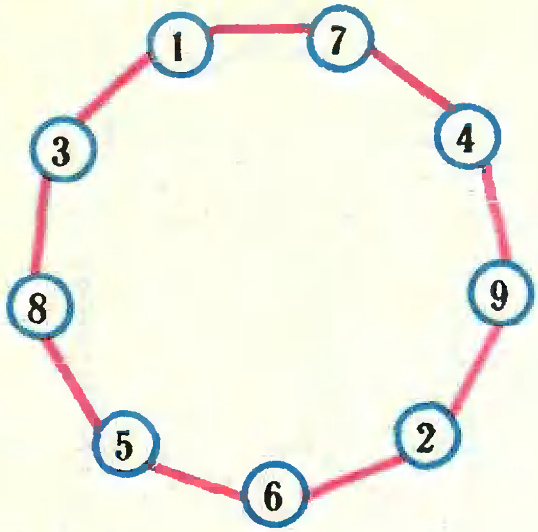


Рис. 3.

а) Точка A лежит на прямой BC, но вне отрезка BC. Расположим точку M на прямой BC так, чтобы отрезок BC лежал внутри отрезка AM. Тогда, очевидно, будут выполняться неравенства: $AM > BM$, $AM > CM$, что противоречит условию.

б) Точка A не лежит на прямой BC. Тогда можно построить треугольник ABC и описать около него окружность. Поместим точку M в центр этой окружности. Тогда $AM = BM$, $AM = CM$, что противоречит условию.

9. Ответ. Можно. Опишем, как это сделать.

На рисунке 2 закрашена розовым фигура, состоящая из пяти квадратиков 1×1 и четырех треугольников, получающихся от разрезания такого же квадратика по диагоналям. Эта фигура — выкройка куба с ребром 1. Это значит, что, согнув ее по начерченным линиям, можно получить такой куб. Вместе с четырьмя зелеными прилегающими треугольниками, ограниченными пунктиром, она образует квадрат со стороной $2\sqrt{2}$. Поскольку $2\sqrt{2} < 3$, то такую фигуру можно поместить внутри квадрата 3×3, что и сделано на чертеже. Сгибая теперь весь квадрат и как угодно приминая лишние (не розовые) части, мы обернем куб.

10. Ответ. Можно. Как это сделать, показано на рисунке 3.

На этом решение можно было бы и закончить, но мы объясним, как его получили, и попутно докажем, что ответ в этой задаче единственный. Постараемся наглядно зафиксировать на бумаге, какие цифры могут стоять рядом, а какие — нет. С этой целью составим изображенную справа таблицу. В этой таблице строки и

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		−	+	−	−	−	+	−	−
2	−		−	−	−	+	−	−	+
3	+	−		−	+	−	−	+	−
4	−	−	−		−	−	+	−	+
5	−	−	+	−		+	−	+	−
6	−	+	−	−	+		+	−	−
7	+	−	−	+	−	+		−	+
8	−	−	+	−	+	−	−		+
9	−	+	−	+	−	−	+	+	

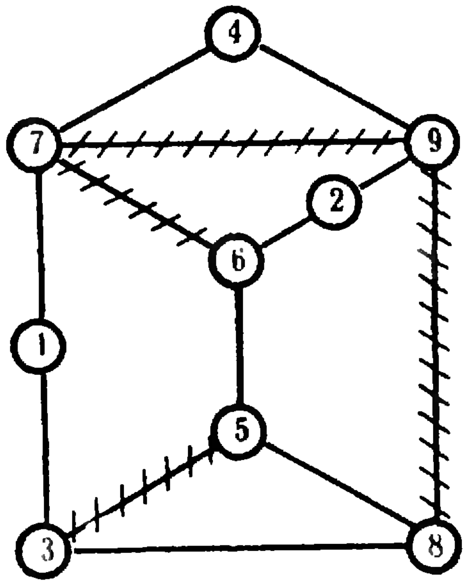


Рис. 4.

столбцы пронумерованы цифрами от 1 до 9. Если две цифры могут стоять рядом, то на пересечении строки и столбца с этими номерами стоит плюс, а если не могут, то минус. Можно поступить иначе. Нарисуем девять кружков и расставим в них цифры от 1 до 9. Соединим линией всякие два кружка, цифры в которых могут стоять рядом. А если две цифры не могут быть соседними, то мы их соединять не будем. Полученную схему перерисуем, чтобы по возможности «распутать» ее. Результат изображен на рисунке 4. Раз такой рисунок построен, вопрос можно сформулировать так: можно ли, идя только по линиям, обойти все кружки этой фигуры по одному разу и вернуться на прежнее место? Будем решать задачу, глядя на этот чертеж, хотя точно так же можно было бы пользоваться и таблицей.

Поскольку 4 связано только с 7 и 9, значит, 7 и 9 и есть ее соседи по расположению на окружности. Аналогично соседи 2—цифры 6 и 9. Значит, 2 и 4 — соседи 9, а 7 и 8 — заведомо не соседи 9. Значит, связи 9 с 7 и 8 можно зачеркнуть (что и сделано на рисунке). Аналогично 1 имеет соседями 3 и 7. Значит, соседи 7 — цифры 1 и 4, а связь 7 с 6 можно зачеркнуть. Теперь 8 связано только с 3 и 5, значит, связь между 3 и 5 можно зачеркнуть. Оставшиеся линии образуют замкнутый путь, который и составляет единственное (с точностью до направления обхода) решение.

11. Составим табличку:

А из Правдина?		*Г* из Правдина?	
Б из Правдина?		Матч происходил в Правдине?	
В из Правдина?		Выиграла команда Правдина?	

Решить задачу — значит заполнить пустые графы этой таблички словами «да» или «нет» так, чтобы не вступить в противоречие с условием. Точнее, надо найти все такие способы заполнения, так как их может быть больше одного. На худой конец можно перебрать все возможные способы заполнения (их всего 64) и для каждого проверить, противоречит он условию или нет. Но это, конечно, некрасивый способ решения. Будем решать иначе.

1) Из заявления *В* следует, что выиграла команда Правдина. Докажем это. Если *В* из Правдина, то сказанное им — правда, и выиграла команда Правдина. Если *В* из Лгунова, то сказанное им — неправда, и выиграла опять-таки команда Правдина.

2) Из заявления *Б* следует, что *Б* из Лгунова, так как его заявление заведомо неверно. Докажем это. Мы уже знаем, что выиграла команда Прав-

дина. Если $Г$ из Правдина, то он не мог сказать, что их команда проиграла, так как это была бы ложь. Если $Г$ из Лгунова, то он тоже не мог этого сказать, так как это была бы правда.

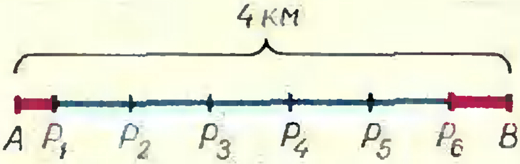


Рис. 5.

3) Из заявления $Г$ следует, что $А$ из Правдина. Докажем это. Если $Г$ из Правдина, то $А$ действительно с ним из одного города, то есть из Правдина. Если $Г$ из Лгунова, то $А$ с ним не из одного города, то есть $А$ снова из Правдина.

4) Теперь легко ответить на все вопросы. Из последнего заявления $А$ следует, что дело происходит в Правдине, $В$ и $Г$ — из Лгунова.

О т в е т. $А$ — из Правдина, $Б$, $В$, $Г$ — из Лгунова, матч происходил в Правдине, выиграла команда Правдина.

12. Ясно, что автобусы обгоняют человека через равные промежутки времени. (Всякий такой промежуток равен $\frac{v_1 t}{v_1 - v_2}$, где t—интервал времени между автобусами, v_1 — скорость автобусов, v_2 — скорость человека. Впрочем, мы этой формулой пользоваться не будем.) Поэтому между теми моментами, когда его обгоняют автобусы, человек успевает пройти всякий раз одинаковое расстояние. Обозначим это расстояние через x.

На рисунке 5 отрезок AB, отмеченный фигурной скобкой, изображает те 4 *км*, которые человек прошел в первый раз. Отметим на нем те 6 точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, в которых его обогнали автобусы. Промежутков между ними 5, и длина каждого равна x. Остаются два куска пути по концам AP_1 и P_6B, которые человек прошел до того, как его обогнал первый автобус, и после того, как его обогнал последний автобус (на рисунке проведены красной линией). Длина каждого из этих отрезков меньше x. Докажем это. Допустим, например, что $P_6B \geqslant x$. Тогда на отрезке P_6B поместится еще одна точка P_7 такая, что $P_6P_7 = x$. В этой точке человека, конечно, тоже обгонит автобус, а всего на этих 4 *км* человека обгонит более шести автобусов, что противоречит условию. Тот факт, что $AP_1 < x$, доказывается аналогично. Учитывая все это, мы можем написать:

$$5x \leqslant 4 < 7x. \tag{1}$$

Аналогично, поскольку на отрезке в 7 *км* расположатся 8 точек, отстоящих на x друг от друга, а концевые отрезки снова будут меньше x:

$$7x \leqslant 7 < 9x. \tag{2}$$

Из (1) мы получаем, что $x \leqslant 4/5$, а из (2) получаем, что $x > 7/9$.

Теперь мы должны определить, сколько точек, отстоящих друг от друга на x *км*, можно расположить на отрезке в 17 *км*.

Поскольку $\frac{17}{4/5} = 21\frac{1}{4}$, а $\frac{17}{7/9} = 21\frac{6}{7}$, то $21\frac{1}{4} \leqslant \frac{17}{x} < 21\frac{6}{7}$ или

$$21\frac{1}{4}x \leqslant 17 < 21\frac{6}{7}x. \tag{3}$$

Докажем, что на отрезке в 17 *км* человека обогнали 21 или 22 автобуса. Действительно, если человека обогнали 20 автобусов (или меньше), то промежутков длины x между ними будет 19 (или меньше), откуда $17 < 21x$, что противоречит (3). Если человека обогнали 23 автобуса (или больше), то $17 > 22x$, что тоже противоречит (3).

О т в е т. 21 или 22 автобуса.

СТРАННЫЙ МАЯТНИК

Н. А. МИНЦ

Обычный, хорошо знакомый вам математический маятник не меняет плоскости своих колебаний.

На этом свойстве маятника основана известная демонстрация вращения Земли — опыт Фуко. Маятник на длинном подвесе совершает колебания. Под ним размечен круг, напоминающий циферблат. Благодаря тому, что плоскость колебаний маятника относительно неподвижных звезд не меняется, а Земля вращается вокруг своей оси, с течением времени маятник проходит последовательно над всеми отметками круга. На полюсе за сутки круг под маятником совершит полный оборот. Впервые такой опыт был проведен французским физиком Л. Фуко в 1851 году под куполом Пантеона в Париже с маятником длиною 67 *м*.

Но всякий ли маятник обязательно сохраняет плоскость колебаний? Ведь нить подвеса позволяет ему колебаться в любой вертикальной плоскости.

Попробуйте сделать такой маятник, как показано на рисунке 1. Для этого возьмите нитку, сложите ее пополам, а к середине привяжите еще одну нитку. К другому концу этой второй нитки прикрепите ложку, ножницы или какой-нибудь другой предмет — и маятник готов. (Вертикальная нить подвеса должна быть достаточно длинной. По крайней мере не меньше, чем нить наклонного подвеса.)

Подвесьте маятник за оба конца сложенной пополам нитки на кнопках или гвоздиках (например, в дверной проем). Если теперь отклонить маятник от положения равновесия и затем отпустить, то вы увидите любопытную картину. Маятник будет двигаться по эллипсу, причем этот эллипс будет постоянно меняться, вытягиваясь то в одну, то в другую сторону. Почему это происходит?

У маятника с одной точкой подвеса (рис. 2) плоскость колебаний ничем не выделена. Каким бы ни было

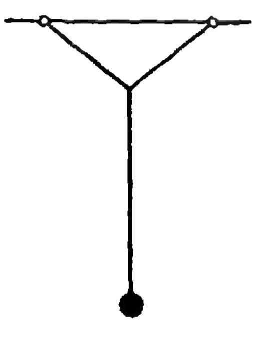


Рис. 1.

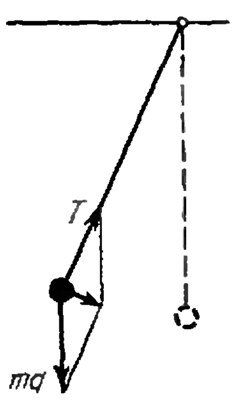


Рис. 2.

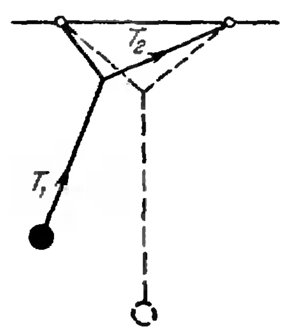


Рис. 3.

первоначальное отклонение маятника, все силы, действующие на него, лежат в одной плоскости. Нужно только, отпуская маятник, не толкнуть его вбок.

Действительно, проведем плоскость через первоначальное и отклоненное положения маятника. Очевидно, в этой плоскости будут лежать как сила тяжести mg, так и сила натяжения нити T. Следовательно, равнодействующая этих сил, которая, собственно, и заставляет маятник колебаться, при любом отклоненном положении маятника также лежит в той же плоскости. Это означает, что нет сил, которые могли бы вывести маятник из этой плоскости. Потому-то маятник и сохраняет плоскость своих колебаний.

Другое дело наш маятник. Здесь точками закрепления и линией отвеса строго фиксирована первоначальная плоскость. Поэтому с самого начала маятник отклонен так, что он не лежит в этой плоскости *). Сила натяжения (рис. 3) имеет составляющую, перпендикулярную первоначальной плоскости. Благодаря этой составляющей движение маятника выходит из первоначальной плоскости. При этом, поскольку сила натяжения не постоянна, меняется и ее перпендикулярная составляющая. Далее, отклоняясь в противоположную сторону, маятник натягивает другую из закрепленных нитей. Это приводит к появлению силы, действующей в другом направлении. При этом, как показывает опыт, и возникает движение по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Кривые, которые описывает наш маятник, называются фигурами Лиссажу. Фигуры Лиссажу получаются при сложении двух взаимноперпендикулярных колебаний. Они могут быть довольно сложными, особенно при близких частотах продольных и поперечных колебаний. Если частоты одинаковы, траекторией движения будет эллипс. Фигура, показанная на рисунке 4, описывается маятником, уравнения движения которого выглядят следующим образом: $x=\sin 3t$, $y=\sin 5t$. Рисунок 5 соответствует колебаниям $x=\sin 3t$, $y=\sin 4t$.

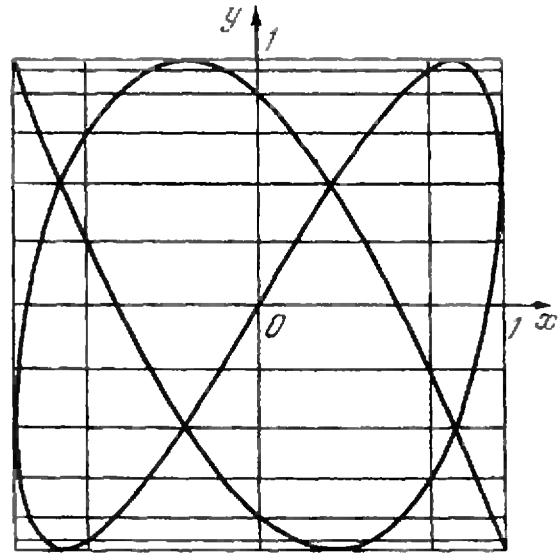


Рис. 4.

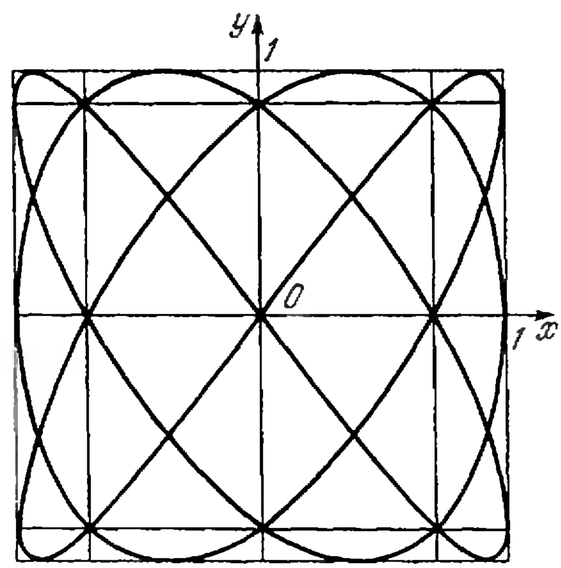


Рис. 5.

Соотношение частот можно варьировать, меняя отношение длин

*) Конечно если отклонить маятник строго перпендикулярно плоскости подвеса, он будет совершать колебания в одной плоскости, перпендикулярной плоскости подвеса. Но практически всегда существуют отклонение от перпендикуляра и скорость, не лежащая в плоскости первоначального отклонения.

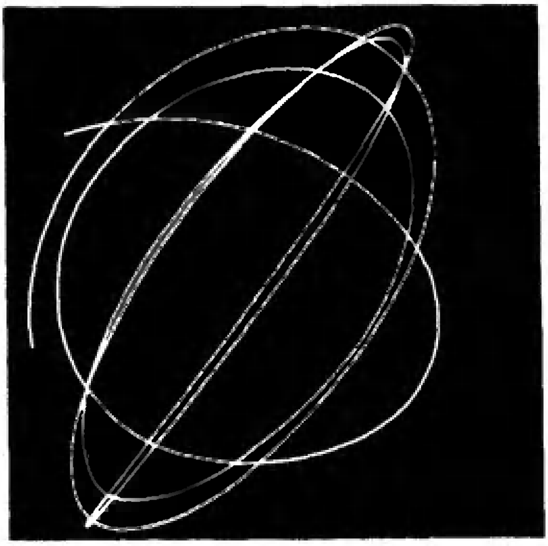


Рис. 6.

вертикальной и наклонной нитей подвеса. При этом вычислить частоты колебаний маятника довольно сложно, а вот увидеть фигуры, вычерчиваемые им, значительно проще.

Для того чтобы увидеть фигуры Лиссажу, можно к подвесу нашего маятника прикрепить ведерко с дырявым дном, наполненное песком, а на пол положить кусок картона, окрашенный в темный цвет. Тогда маятник «нарисует» отчетливую траекторию своего движения.

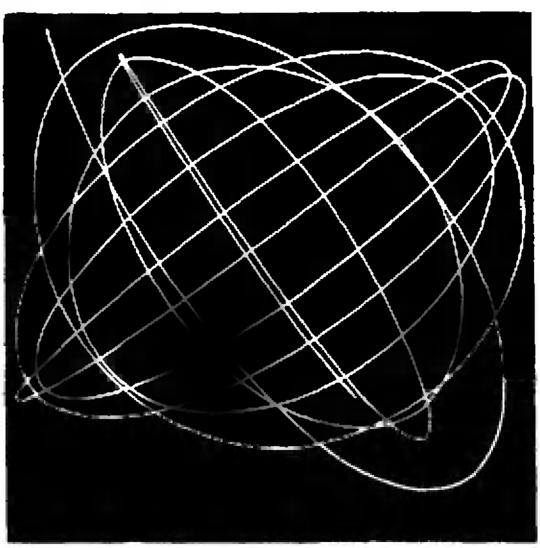


Рис. 7.

Можно получить фотографии траекторий движения маятника. Возьмите грузило или тяжелый маленький шарик и покрасьте его белой краской. Сделайте из темных ниток такой же подвес, как у маятника, изображенного на рисунке 1. Под маятник подложите лист черной матовой бумаги. Гладкая бумага может отсвечивать, а это будет мешать наблюдениям. Фотографировать надо сверху. Установите фотоаппарат так, чтобы плоскость объектива была горизонтальна. При достаточно большой выдержке на фотоснимках можно увидеть четкие траектории.

На рисунках 6 и 7 приведены фотографии траекторий, полученные таким способом. Видно, как маятник изменял направление колебаний. На фигуре рисунка 6 это изменение произошло более резко. Время экспозиции этих двух фотографий различно. Это видно хотя бы из того, что длина траекторий неодинакова.

Получившиеся кривые как бы вписаны в параллелограмм. На самом деле они должны быть вписаны в прямоугольник. То, что у нас не получился прямоугольник, объясняется просто: плоскость объектива была не строго горизонтальна.

В опытах с маятником следует учитывать, что более или менее правильная траектория получается только в том случае, когда нет сильных затуханий. Колебания маятника с малой массой груза и достаточно большим объемом будут быстро затухать. Такой маятник качнется несколько раз, быстро уменьшая амплитуду. Естественно, при движении с сильным затуханием увидеть и сфотографировать изменение направления колебаний маятника не удастся.

С фигурами Лиссажу приходится встречаться довольно часто в тех случаях, когда колебания взаимно перпендикулярны. Так, они неизбежно появляются при настройке осциллографа.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М86. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размера 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2. Вместо нее удалось достать плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

Л. Г. Лиманов

М87. Докажите, что если три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса (рис. 1).

М88. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

М. Ф. Безбородников

М89. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать такие три стороны, при продолжении

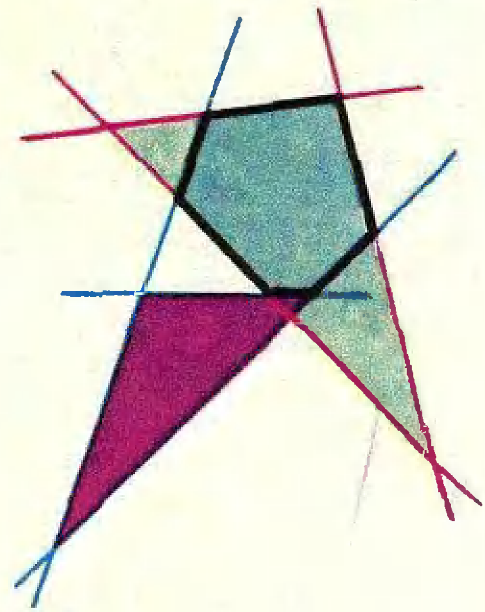


Рис. 2.

которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. (Например, на рисунке 2, где многоугольник обведен черной линией, три красные прямые удовлетворяют требуемому условию, а три синие —нет.)

И. М. Яглом

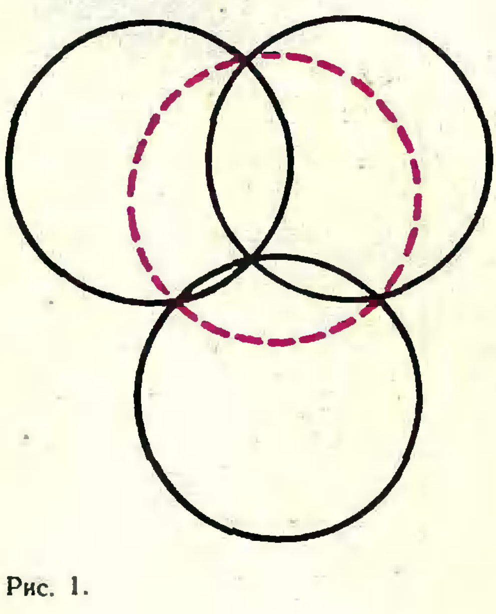


Рис. 1.

М90. Докажите, что если $x_1<x_2<x_3<\ldots$ — натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}.$$

Г. И. Натансон

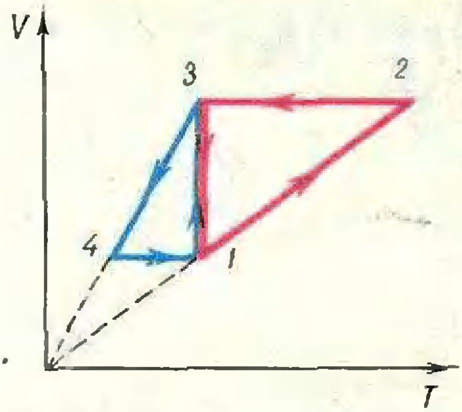


Рис. 3.

Ф98. Какую максимальную разность потенциалов можно получить, имея в своем распоряжении источник с э. д. с. E и n одинаковых конденсаторов с емкостью c каждый?

Л. Г. Асламазов

Ф99. На рисунке 3 показаны $V—T$ диаграммы для двух круговых процессов. При каком из них газ совершает бо́льшую работу: при процессе $1 \to 2 \to 3 \to 1$ или при процессе $1 \to 3 \to 4 \to 1$?

И. Ш. Слободецкий

Ф100. На высоте 200 *км* плотность атмосферы равна $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ *кг/м*^{3}. Оцените силу сопротивления, испытываемого спутником с поперечным сечением 0,5 *м*^{2} и массой 10 *кг*, летящим на этой высоте.

Ф101. К висящей очень легкой пружине с жесткостью k подвешен шарик. Вначале пружина не растянута. Затем шарик отпускают. Какой максимальной скорости достигнет шарик при своем движении? Масса шарика m.

С. А. Беляев

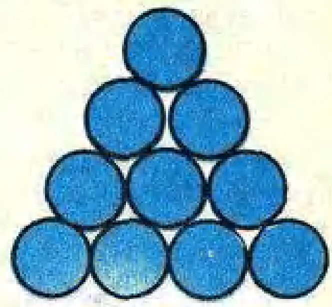
Ф102. В герметически закрытом сосуде смешали поровну кислород и гелий. Затем в стенке сосуда сделали небольшое отверстие. Каков состав молекулярного пучка, выходящего из него?

И. Ш. Авербух

В этом номере мы помещаем несколько задач из журнала «Scientific American» из раздела «Математические игры». Бессменным редактором «Математических игр» является Мартин Гарднер. Задача на четвертой странице обложки тоже взята из этого раздела. (Перевод выполнен И. Н. Мороз).

УЛОЖИТЕ МОНЕТЫ

Эта небольшая задача придумана Кобоном Фуджимура из Японии. Уложите десять монет так, как показано на рисунке. Какое наименьшее число монет вы должны убрать, чтобы не нашлось ни одного равностороннего треугольника (любых размеров) с вершинами в центрах оставшихся монет?



СТРАННОЕ ЧИСЛО

Найдите такое десятизначное число, в котором его первая цифра обозначает общее количество нулей в числе, вторая — общее количество единиц и так далее до последней цифры, обозначающей количество девяток в числе (разумеется, нуль — цифра). Решение только одно.

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М34—М38.

М34

Доказать, что если натуральное число делится на 10 101 010 101, то в его десятичной записи по крайней мере шесть цифр отличны от нуля.

Задача решается очень легко, если число A, делящееся на 10 101 010 101, имеет не более 12 цифр; тогда оно обязательно имеет вид *абабабабабаб*, и задача решена.

Остается придумать какой-нибудь способ свести задачу к этому случаю.

Число 10 101 010 101 мы обозначим через M. Докажем, что если число A делится на M, то найдется двенадцати- (или менее) значное число C, также делящееся на M и имеющее не больше ненулевых цифр, чем A.

Лемма. Если A делится на M и имеет больше 12 цифр (считая нули), то найдется число B, также делящееся на M, меньшее чем A и имеющее не больше ненулевых цифр, чем A.

Докажем это. Пусть $A=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$; вычеркнем его первую цифру a_1 и прибавим ее же на 12 разрядов ниже, например:

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,123\,456 \rightarrow 23\,456\,789\,123\,456 \\ +\quad 1 \\ \hline 23\,456\,789\,123\,556 \end{array}$$

Полученное число будет, безусловно, меньше исходного: легко проверить, что мы просто вычли из числа A число $a_1\cdot(10^{n-1}—10^{n-13})$. В скоб-

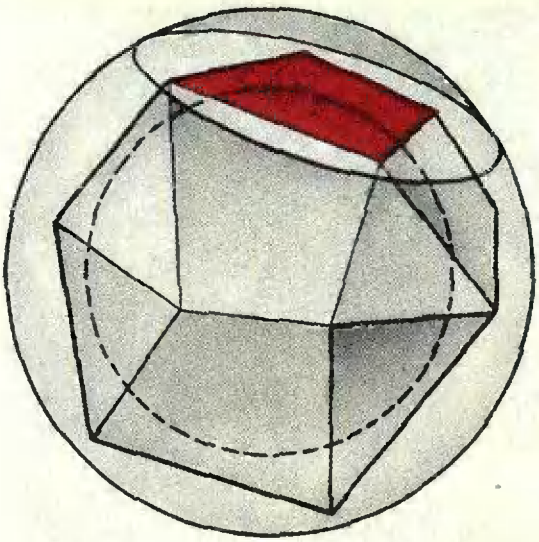


Рис. 1.

ках стоит произведение $10^{n-13}\times$ $\times(10^{12}-1)$; второй сомножитель, очевидно, делится на A (это число из 12 девяток), так что разность делится на A. Остается заметить, что в получившемся числе значащих (не нулевых) цифр не больше, чем в исходном. В нашем примере их количество даже уменьшилось на единицу; этого могло, впрочем, не случиться, если бы на 13-м месте стоял 0 или если бы там стояла достаточно большая цифра, а на предыдущем месте 0, как в примере

$$888\,888\,888\,880\,\dot{4}21 \rightarrow \begin{array}{r} 88\,888\,888\,880\,421 \\ +\qquad\qquad\qquad 8 \\ \hline 88\,888\,888\,881\,221 \end{array}$$

(мы не рассмотрели еще случай, когда перенос происходит и в 12-м разряде, но легко видеть, что тогда число значащих цифр даже уменьшится). Лемма доказана.

Теперь если A делится на M, вычтем из A его первую цифру, умноженную на $10^{n-13}\cdot(10^{12}-1)$. С полученным числом проделаем ту же операцию и будем поступать так до тех пор, пока не доберемся до 12-значного числа. Так как в нем не меньше шести значащих цифр, то и в A не меньше шести значащих цифр.

Большинство решавших пытались рассматривать частное от деления A на M; но решить ее этим способом очень трудно, поскольку при обратном умножении этого частного на 10 101 010 101 его цифры «склеиваются» друг с другом, может произойти много переносов единиц в разрядах, и разобраться в том, что получится, почти невозможно. Идея решения — в том, чтобы рассматривать эти переносы по одному.

А. К. Толпыго

М35

Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

Первое решение. Предположим противное, то есть, что расстояние между любыми двумя точками поверхности нашего 19-гранника не больше 21. *Тогда* этот многогранник лежит внутри сферы радиуса 11, концентричной сфере радиуса 10, а каждая его грань лежит между сферами. *Поэтому* площадь каждой грани не слишком велика, а именно, не превосходит площади показанного на рисунке 1 круга, радиус которого равен $\sqrt{21}$. В нашем многограннике 19 граней, поэтому площадь S его поверхности не превосходит $19\left[\pi\left(\sqrt{21}\right)^2\right]=\pi(20^2-1^2)=399\pi$. Но многогранник описан около сферы радиуса 10. *Отсюда* площадь его поверхности больше площади поверхности этой сферы $4\pi(10)^2$ *). Итак, с одной стороны, $S<399\pi$, с другой стороны, $S>400\pi$. Полученное противоречие и решает задачу. (Аналогичное решение прислал нам *Д. Григорьев* из Ленинграда.)

В этом (нестрогом) решении мы пропустили доказательства трех утверждений, которые начинаются с трех выделенных выше курсивом слов: *тогда, поэтому, отсюда*. Мы оставляем читателю эти простые доказательства, но хотим предупредить, что хотя третье утверждение легко доказывается для выпуклого многогран-

---

*) Напомним, что для шара радиуса R объем равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, площадь сегментной поверхности с высотой h равна $2\pi Rh$ и, в частности, площадь всей сферы равна $4\pi R^2$.

ника с помощью сравнения его объема с объемом сферы *), тем не менее интуитивно ясное и правильное утверждение о том, что наш многогранник выпуклый, трудно доказать строго, так как само строгое определение многогранника весьма сложно. (Загляните, например, в книгу И. Лакатоса «Доказательства и опровержения», М., «Наука», 1967).

Второе решение. Поставим более общий вопрос: какое наименьшее число граней может иметь многогранник, описанный около сферы радиуса r и целиком лежащий в концентрической с ней сфере радиуса $R>r$. (Вот житейская ситуация, которая подсказала автору эту задачу: каким наименьшим числом прямолинейных взмахов ножа можно срезать верхний слой кожуры апельсина, не срезав при этом ни одного куска сердцевины? Очевидно, что после срезания всего верхнего слоя кожуры остаток будет многогранником, так как на его поверхности не будет ни одного закругленного участка, так что этот вопрос эквивалентен предыдущему.)

Мы не знаем точного ответа на этот более общий вопрос, но докажем для числа граней некоторое неравенство, которое при $r=10$, $R=11$ показывает, что $N>22$. Тем самым мы докажем, что если в условии задачи М35 вместо 19-гранника взять 22-гранник, то утверждение задачи по-прежнему останется справедливым.

Итак, пусть N-гранник описан около сферы радиуса r и целиком лежит внутри сферы радиуса R. Рассмотрим какую-нибудь его грань.

Проходящая через нее плоскость отрезает от сферы шапочку (сегментную поверхность) высоты $R-r$. Ясно, что если построить шапочки для всех граней нашего многогранника, то их объединение покроет всю внешнюю сферу. Каждая из N шапочек есть сегментная поверхность высоты $R-r$, и, следовательно, имеет площадь $2\pi R(R-r)$. Сумма площадей всех шапочек больше площади сферы. Поэтому $N\cdot 2\pi R(R-r)>4\pi R^2$, отсюда $N>\frac{2R}{R-r}$, в частности, при $R=11$, $r=10$ получаем $N>22$.

Интересно, что по любому набору шапочек, целиком покрывающих внешнюю сферу, можно построить многогранник, описанный около внутренней сферы. (Докажите!) Поэтому наш вопрос про минимальное число граней полностью эквивалентен следующему вопросу. Каково минимальное число $N=N(h)$ шапочек высоты h, целиком покрывающих сферу радиуса 1? (В задаче М35 $h=\frac{1}{11}$.)

Очевидно, что $N(h)>\frac{2}{h}$, но это неравенство отражает просто тот факт, что сумма площадей шапочек больше площади сферы, в то время как интуитивно ясно, что при $h<1$ шапочки должны довольно сильно перекрываться. И действительно, можно доказать, что при достаточно малых h $N(h)>1{,}2\frac{2}{h}$. Попробуйте сами доказать, например, что при $h<1$

$$N(h)>1{,}001\frac{2}{h}.$$

(С решениями этой задачи и других похожих задач можно познакомиться по книге Л. Ф. Тота. «Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве». М., Физматгиз, 1958).

А. Г. Кушниренко

*) Действительно, объем многоугольника равен $\frac{R\cdot S}{3}$, где R — радиус вписанной сферы, а S — площадь его поверхности.

М36

Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

Предположим, что такое расположение семи точек и семи прямых су-

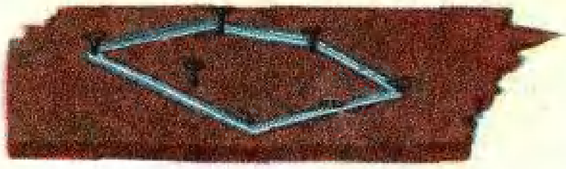


Рис. 2. Выпуклой оболочкой множества из конечного числа точек является выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из этих точек (или отрезок, если все точки лежат на одной прямой).

ществует. Прежде всего докажем, что *каждые две из данных точек лежат на одной из данных прямых*. Действительно, если A — одна из этих точек, то через A проходят три прямые, и на каждой из них лежит по две из данных точек (не считая A); тем самым A и любая из шести точек, отличных от A, лежат на одной из данных прямых. Точно так же доказывается, что *каждые две из данных прямых пересекаются в одной из данных точек*: если a — одна из прямых, то через каждую из трех лежащих на ней точек проходит по две прямые (не считая a), и поэтому каждая из этих прямых пересекается с a в одной из данных точек.

Рассмотрим теперь выпуклую оболочку множества из семи наших точек — наименьшую выпуклую фигуру, содержащую эти семь точек.

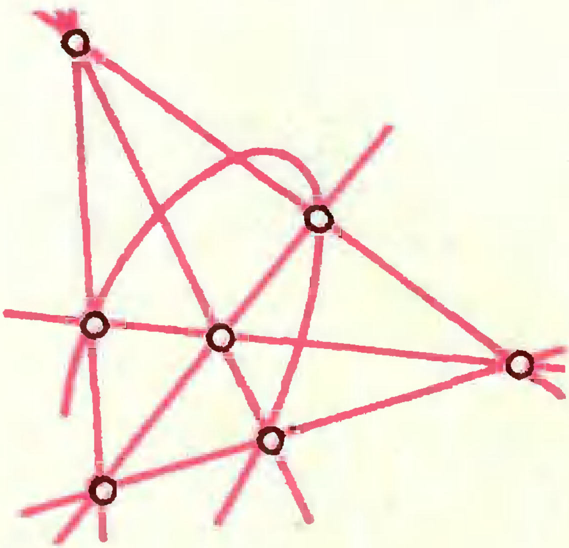


Рис. 3. Эта конфигурация почти полностью удовлетворяет требованиям задачи М36, только одну «прямую» пришлось изогнуть.

Это будет некоторый выпуклый n-угольник, где $n \leqslant 7$ (его можно получить так: вбить в данные семь точек гвозди и затем натянуть резиновую нитку, охватывающую все эти гвозди; нитка натянется по контуру многоугольника с вершинами в некоторых n из данных точек, а все остальные $(7-n)$ точек будут лежать внутри или на границе этого многоугольника; см. рис. 2). Ясно, что случай $n \geqslant 4$ невозможен — ведь на каждой стороне n-угольника должна лежать еще одна третья точка, кроме вершин, а всего точек семь. Случай $n=3$, когда выпуклой оболочкой является некоторый треугольник ABC, тоже невозможен. Действительно, если E и F — точки (из числа данных семи), которые лежат на сторонах AB и BC, то EF и AC — две из данных прямых — должны пересекаться в одной из данных семи точек, а они будут пересекаться на продолжении стороны AC, то есть вне треугольника ABC. Получили противоречие.

Рисунок 3 поможет найти ошибку тем, кто прислал нам неверное решение этой задачи.

М37

В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате (стороны которого идут по линиям сетки) по модулю не превосходит единицы. Докажите, что тогда существует такое число c, что сумма чисел в любом прямоугольнике (стороны которого идут по линиям сетки) не больше c; другими словами, что суммы чисел во всех прямоугольниках ограничены. Докажите, что это верно для $c=4$. Может быть, вам удастся улучшить эту оценку (например, доказать, что наше утверждение верно для $c=3$ или даже для $c=2$).

Решение, которое мы приводим, близко к предложенному *А. Климовым* (Москва).

Докажем, что c равное 4 подходит.

Предположим, что в некотором прямоугольнике со сторонами a и b сумма по модулю равна $4+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ $(a<b)$. Построим четыре квадрата, у каждого из которых три стороны идут по некоторым трем сто-

ронам этого прямоугольника $a \times b$; тогда прямые, на которых лежат четвертые стороны этих квадратов, образуют новый прямоугольник со сторонами $2b-a$ и $|2a-b|$ (см. рис. 4 и 5; случай $b=2a$, разумеется, невозможен). Докажем, что в этом новом прямоугольнике сумма чисел по модулю не меньше $4+3\varepsilon$.

Можно считать, что $s_4+s_5+s_6=4+\varepsilon$ (если эта сумма равна $-(4+\varepsilon)$, то заменим знаки у всех чисел на противоположные).

Рассмотрим сначала случай $b<2a$. Тогда

$$s_5=(s_4+s_5)+(s_5+s_6)-(s_4+s_5+s_6)\leqslant 1+1-4-\varepsilon=-2-\varepsilon,$$

$$s_2+s_8=(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)+(s_4+s_5+s_6+s_7+s_8+s_9)-s_1-s_3-s_7-s_9-2(s_4+s_5+s_6)\leqslant 1+1+1+1+1+1-2(4+\varepsilon)=-2-2\varepsilon,$$

откуда $s_2+s_5+s_8\leqslant -4-3\varepsilon$.

Аналогично, если $b>2a$, то

$$(s_5=-s_4-s_6+(s_4+s_5+s_6)\geqslant -1-1+4+\varepsilon\geqslant 2+\varepsilon,$$

$$s_2+s_8=(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_7+s_8)+(s_8+s_9)-(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)-(s_4+s_5+s_6+s_7+s_8+s_9)+2(s_4+s_5+s_6)\geqslant 2+2\varepsilon,$$

$$s_2+s_5+s_8\geqslant 4+3\varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что если в прямоугольнике $a_1 \times b_1$ сумма чисел по модулю больше $4+\varepsilon$, то в новом прямоугольнике $a_2 \times b_2$, где $a_2=|2a_1-b_1|$, $b_2=2b_1-a_1$, сумма чисел по модулю больше $4+3\varepsilon$. Для прямоугольника $a_2 \times b_2$ мы можем построить точно тем же способом новый прямоугольник $a_3 \times b_3$, в котором сумма чисел будет больше $4+3\cdot 3\varepsilon=4+9\varepsilon$, и так далее — целую последовательность прямоугольников $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$, $a_3 \times b_3, \ldots$, $a_n \times b_n, \ldots$ такую, что в прямоугольнике $a_n \times b_n$ сумма чисел по модулю больше $4+3^{n-1}\varepsilon$. Докажем, что в этой последовательности все прямоугольники, начиная

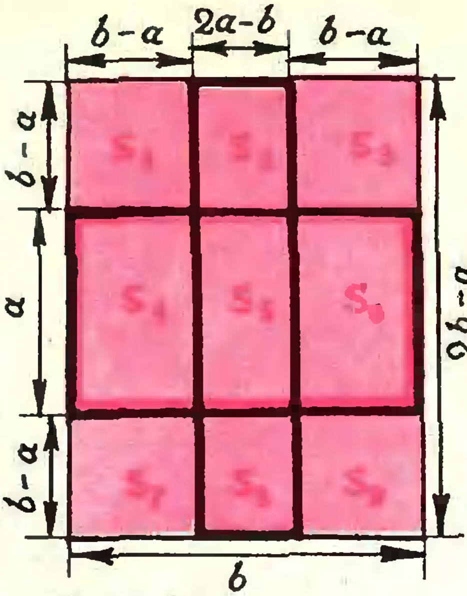


Рис. 4. $2a>b$.

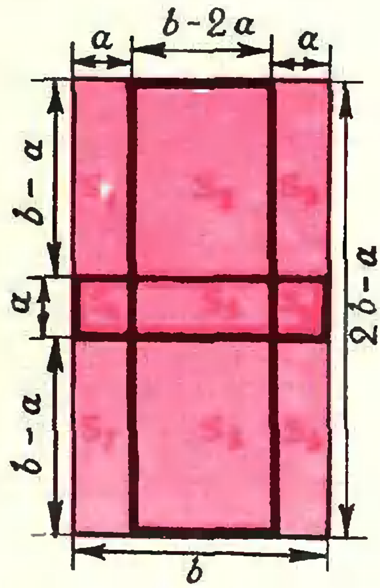


Рис. 5. $2a<b$.
Первоначальный прямоугольник $a \times b$ обведен красной линией, а новый $2a-b \times (2b-a)$ — черной.

с некоторого, будут относиться ко второму типу, то есть для них $b_n>2a_n$. Действительно, во-первых, легко проверить, что если

$$\frac{a_n}{b_n}<\frac{1}{2},$$

то и

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{b_n-2a_n}{2b_n-a_n}<\frac{1}{2}.$$

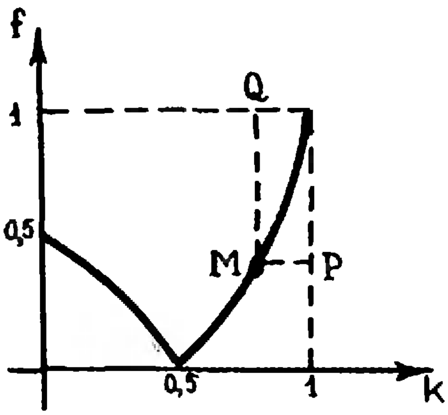


Рис. 6. Пусть $k_n=\frac{a_n}{b_n}$. Тогда $k_{n+1}=f(k_n)$, где $f(k)=\frac{|1-2k|}{2-k}$. Здесь изображен график этой функции на отрезке $0\leqslant k\leqslant 1$. При решении задачи мы пользуемся тем, что для любой точки M правой половины графика $MQ/MP>2$; если $0\leqslant k\leqslant {}^1/_2$, то $0\leqslant f(k)\leqslant {}^1/_2$, причем $f(f(k))=k$, то есть функция f на отрезке $0\leqslant k\leqslant {}^1/_2$ совпадает с обратной к ней функцией, и график ее симметричен относительно биссектрисы угла между осями координат.

	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{2}$	-1		-1	$\frac{1}{2}$	
	-1	1	1	1	-1	
	$\frac{1}{2}$	-1		-1	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

Рис. 7. Во всех незаполненных клетках стоят нули.

Во-вторых, если $\frac{a_n}{b_n}>\frac{1}{2}$, то

$$\frac{1-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{1-\frac{a_n}{b_n}}=\frac{1-\frac{2a_n-b_n}{2b_n-a_n}}{1-\frac{a_n}{b_n}}=$$

$$=\frac{3b_n}{2b_n-a_n}>\frac{3b_n}{2b_n-\frac{b_n}{2}}=2;$$

таким образом, величина $1-\frac{a_n}{b_n}$ при переходе от n к $n+1$ увеличивается не менее чем в два раза до тех пор, пока мы не придем к прямоугольнику с $\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{1}{2}$. Поэтому, каким бы малым ни было $1-\frac{a_1}{b_1}$, всегда после нескольких — не более чем $-1-\log_2\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)$ — операций мы придем к прямоугольнику «второго типа», и дальше в нашей последовательности будут встречаться только такие прямоугольники.

Поэтому мы можем считать, что уже $\frac{a_1}{b_1}<\frac{1}{2}$.

При этом

$$a_3=b_2-2a_2=$$
$$=(2b_1-a_1)-2(b_1-2a_1)=3a_1,$$
$$b_3=2b_2-a_2=$$
$$=2(2b_1-a_1)-(b_1-2a_1)=3b_1.$$

Следовательно, вообще $a_{2k+1}=3^k a_1$ и $b_{2k+1}=3^k b_1$, причем сумма чисел в этом прямоугольнике $3^k a_1\times 3^k b_1$ больше $4+9^k\varepsilon$, то есть, выбрав k достаточно большим, мы можем сделать ее сколь угодно большой. Теперь уже нетрудно получить противоречие: ясно, что любой прямоугольник $Na_1\times Nb_1$, где a_1, b_1 и N — целые числа, можно разбить на a_1b_1 квадратов (со стороной N), и поэтому сумма чисел в нем не может превосходить по модулю числа a_1b_1.

Рисунок 6 поясняет вторую половину доказательства. На рисунке 7 изображен пример, для которого сумма чисел в некотором прямоугольнике равна трем. Таким образом, для $c=2$ утверждение задачи неверно. Весьма правдоподобно, что точная оценка $c=4$, но примеров, показывающих, что $c>3$, мы не знаем.

Н. Б. Васильев

М38

Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию (то есть $\frac{AK}{AL}=\frac{AL}{AM}$). Найдите острые углы треугольника ABC.

Нетрудно доказать, что $AKDM$ — прямоугольник и L — его центр (рис. 8). Опустим перпендикуляр AP на KM.

Тогда

$$AL^2=AK\cdot AM=KM\cdot AP=2AL\cdot AP,$$

$$AL=2AP, \angle PLA=30^\circ,$$

и поскольку $AL=KL=ML$, отсюда следует, что острые углы треугольника AKM равны 15° и 75°. Такие же острые углы имеет и треугольник ABC: $\angle C=\angle BAD=\angle AKM$.

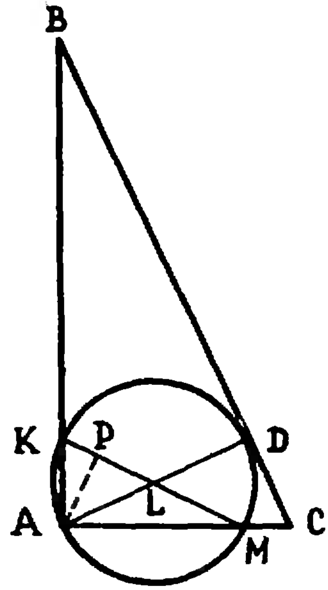


Рис. 8.

Такое решение прислали *С. Котанов* из Тбилиси и *В. Кривицкий* из д. Клетное Минской обл.

Л. М. Лоповок

В этом номере мы публикуем решения задач Ф52—Ф58

Ф52

Мяч брошен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения?

Кинетическая энергия мяча на любой высоте при подъеме больше, чем при спуске мяча. Действительно, если бы не было сопротивления воздуха, то эти энергии были бы равны. Из-за сопротивления воздуха при спуске кинетическая энергия мяча меньше, чем при подъеме, на величину работы, затраченной на преодоление сопротивления воздуха. Это означает, что на любой высоте скорость мяча при подъеме больше, чем при спуске. Больше, очевидно, и средняя скорость движения мяча. Поэтому время подъема мяча меньше времени падения.

Ф53

В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 и толщинами слоев h_1 и h_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю. Какова плотность материала, из которого сделано тело?

Воспользуемся тем, что потенциальная энергия, которой обладает тело на поверхности верхней жидкости, тратится при движении тела на преодоление сопротивления. Поэтому

$$mg\,(h_1+h_2)=A_1+A_2, \qquad (*)$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A_1 — работа сил сопротивления в верхней жидкости и A_2 — работа сил сопротивления при движении тела в нижней жидкости. Так как тело обтекаемо, сила сопротивления — это архимедова выталкивающая сила: $F_1=\rho_1 Vg$ в верхней жидкости и $F_2=\rho_2 Vg$ в нижней (V — объем тела). Поэтому

$$A_1=\rho_1 Vgh_1 \text{ и } A_2=\rho_2 Vgh_2.$$

Подставляя эти выражения для A_1 и A_2 в уравнение (*) и учитывая что $m=V\cdot\rho$ (ρ — плотность тела), получим $\rho\,(h_1+h_2)=\rho_1 h_1+\rho_2 h_2$.

Отсюда

$$\rho=\frac{\rho_1 h_1+\rho_2 h_2}{h_1+h_2}.$$

Правильное решение прислали *В. Калиничев* из Москвы, *Ю. Полонский* из Зеленодольска ТАССР и другие читатели.

Однако большинство читателей решило задачу более сложным способом.

На тело, движущееся в жидкости, действуют две силы: сила тяжести, равная $mg=\rho Vg$, и архимедова выталкивающая сила (равная $F_1=\rho_1 Vg$, когда тело движется в жидкости с плотностью ρ_1, и $F_2=\rho_2 Vg$, когда оно движется в жидкости с плотностью ρ_2). Поскольку тело обтекаемо, силы, действующие на него во время движения в каждой из жидкостей, не меняются. Следовательно, тело движется равноускоренно. Запишем уравнения движения тела. В верхней жидкости: $mg-F_1=ma_1$ (ускорение направлено вниз), в нижней жидкости: $F_2-mg=ma_2$ (ускорение направлено вверх). Из этих уравнений найдем, что в жидкости с плотностью ρ_1 тело движется с ускорением $a_1=g\frac{\rho-\rho_1}{\rho}$, а в жидкости с плотностью ρ_2 — с ускорением $a_2=g\frac{\rho_2-\rho}{\rho}$.

Пройдя первую жидкость, тело приобретет скорость $V_0=a_1t_1$, где t_1 — время движения. Это время можно найти из кинематического уравнения $h_1=\frac{a_1t_1^2}{2}$. Поэтому $V_0=\sqrt{2a_1h_1}$. С такой скоростью тело начнет двигаться в нижней жидкости. Так как скорость тела в конце движения должна стать равной нулю, то $V_0-at_2=0$, где t_2 — время движения тела во второй жидкости. Отсюда $t_2=\frac{V_0}{a_2}$. За это время тело пройдет во второй жидкости расстояние h_2. Поэтому $h_2=V_0t_2-\frac{a_2t_2^2}{2}$. Подставляя в последнее уравнение выражения для V_0, a_2 и t_2, получим

$$h_2=\frac{V_0^2}{a_2}-\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a_2}=\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a_2}=\frac{a_1h_1}{a_2}.$$

Отсюда

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho}.$$

Решая последнее уравнение, найдем

$$\rho=\frac{\rho_1h_1+\rho_2h_2}{h_1+h_2}.$$

Ф54

Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рисунке 9? Сопротивление амперметра очень мало.

Найдем вначале ток, идущий через источник. Для этого нам нужно найти сопротивление всей цепи. Сопротивление амперметра пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением всей цепи. Будем его считать равным нулю. Это позволяет перерисовать нашу схему так, как показано на рисунке 10. После этого можно найти сопротивление всей цепи.

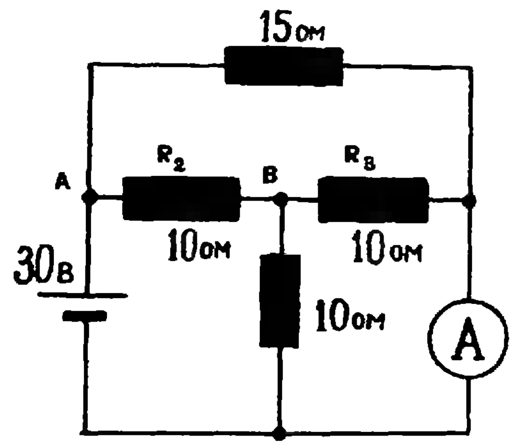


Рис. 9.

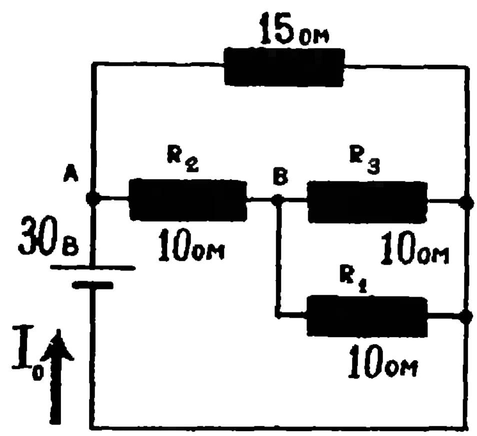


Рис. 10.

Оно равно 7,5 *ом*. Поэтому через источник идет ток $I_0 = \frac{30\ в}{7,5\ ом} = 4\ a$.

Ток, идущий через источник, складывается из тока, идущего через амперметр, и тока I_1, идущего через сопротивление R_1. Найдем ток I_1.

В точке A ток I_0 делится поровну между верхней и нижней ветвями цепи. Поэтому через сопротивление R_2 идет ток I_2, равный $2a$. В точке B этот ток опять делится поровну между одинаковыми сопротивлениями R_1 и R_3. Поэтому через сопротивление R_1 идет ток 1 a. Теперь можно найти ток, идущий через амперметр. Он равен $I_0 - I_1 = 3a$.

Ф55

Оцените, на какую высоту H поднимется стрела, пущенная из детского лука вертикально вверх. Масса стрелы $m=20$ г, длина тетивы $AB=1$ м. Тетиву оттягивают на $h_0=5$ см. Натяжение тетивы считать постоянным и равным 250 н.

Энергия, приобретаемая стрелой при выстреле, равна работе силы, действующей на стрелу со стороны тетивы. Эта сила, очевидно, равна равнодействующей F сил натяжения тетивы T (рис. 11). Если угол, образуемый тетивой в точках A и B с линией AB, обозначить α, то нетрудно найти, что $F = 2T\sin\alpha$. Итак, сила, действующая на стрелу, зависит от того, насколько оттянута тетива. Так как тетиву оттягивают на расстояние, малое по сравнению с ее длиной, то угол α мал, то есть $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Поэтому $F = 2T\alpha$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{AB}{2}}$ (h — высота прогиба тетивы), то

$$F = 4T\,\frac{h}{AB}.$$

Итак, сила, действующая на стрелу, пропорциональна h (рис. 12).

Нетрудно найти работу этой силы. Она равна площади фигуры между

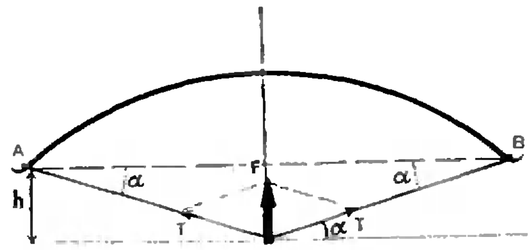


Рис. 11.

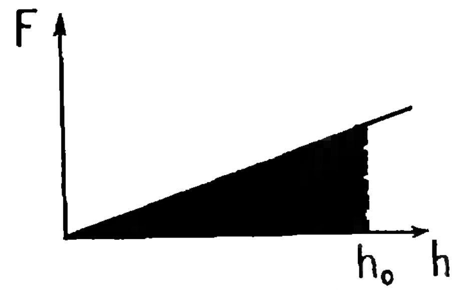


Рис. 12.

графиком зависимости силы от высоты прогиба и осью абсцисс*):

$$A = 2T\,\frac{h_0^2}{AB}.$$

Такую энергию приобретет стрела при выстреле. Эта энергия должна быть равна потенциальной энергии стрелы в верхней точке подъема:

$$mgH = 2T\,\frac{h_0^2}{AB}.$$

Отсюда

$$H = \frac{2Th_0^2}{AB\cdot mg} \approx 5\ м.$$

Ф56

Почему флаг «полощется» на ветру?

Эту задачу легко решат те, кто читал статью А. Эйнштейна «Элемен-

*) Можно подсчитать работу силы, действующей на стрелу, и иначе. Максимальная сила равна $4T\frac{h_0}{AB}$, минимальная — 0 (когда тетива не оттянута). Умножив среднюю силу $F_{ср} = 2T\frac{h_0}{AB}$ на длину пути h_0, получим $A = 2T\frac{h_0^2}{AB}$.

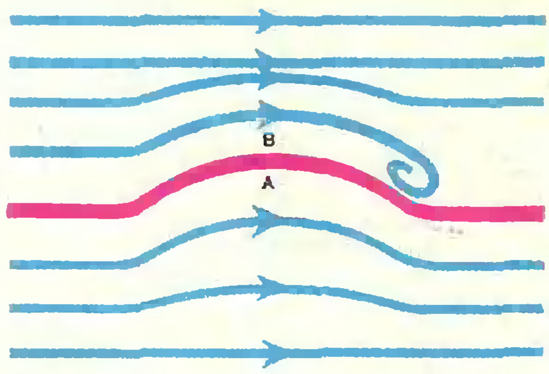


Рис. 13.

тарная теория полета и волн на воде» в «Кванте» № 5 за 1970 год. Поведение флага объясняется точно так же, как и образование волн на воде.

Предположим, что в каком-то месте флаг слегка изогнут (рис. 13). В этом случае вверху при обтекании выступа скорость ветра больше, а внизу, в области вогнутости флага — меньше скорости ветра вдали от флага. Из закона Бернулли следует, что при этом давление воздуха в точке A больше, чем давление в точке B. Поэтому образовавшийся выступ должен увеличиваться. Кроме того, поскольку из-за образования вихрей за выступом давление за ним меньше давления перед выступом, этот выступ будет перемещаться к концу флага. Итак, случайно образовавшаяся вогнутость флага будет увеличиваться. Если учесть еще, что благодаря образованию вихрей при обтекании даже плоского флага при равномерном ветре давление с разных сторон флага может оказаться разным и поэтому будут легко образовываться небольшие изгибы поверхности, становится понятным, почему флаг «полощется» на ветру.

Ф57

Два одинаковых шарика, связанных невесомой пружинкой, движутся по гладкому горизонтальному полу с одинаковой скоростью, перпендикулярной вертикальной стенке. Опишите, как происходит соударение системы со стенкой. Как будут двигаться шарики после удара? Удар шарика о стенку абсолютно упругий, время соударения пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний шарика на пружинке.

Так как скорости шариков вначале одинаковы и постоянны, то пружинка не деформирована. Действительно, в противном случае на каждый из шариков действовала бы со стороны пружинки сила, сообщающая ему ускорение, и скорость шарика менялась бы со временем. После того как первый шарик ударяется о стенку, его скорость меняется на противоположную. Шарики начинают двигаться навстречу друг другу с

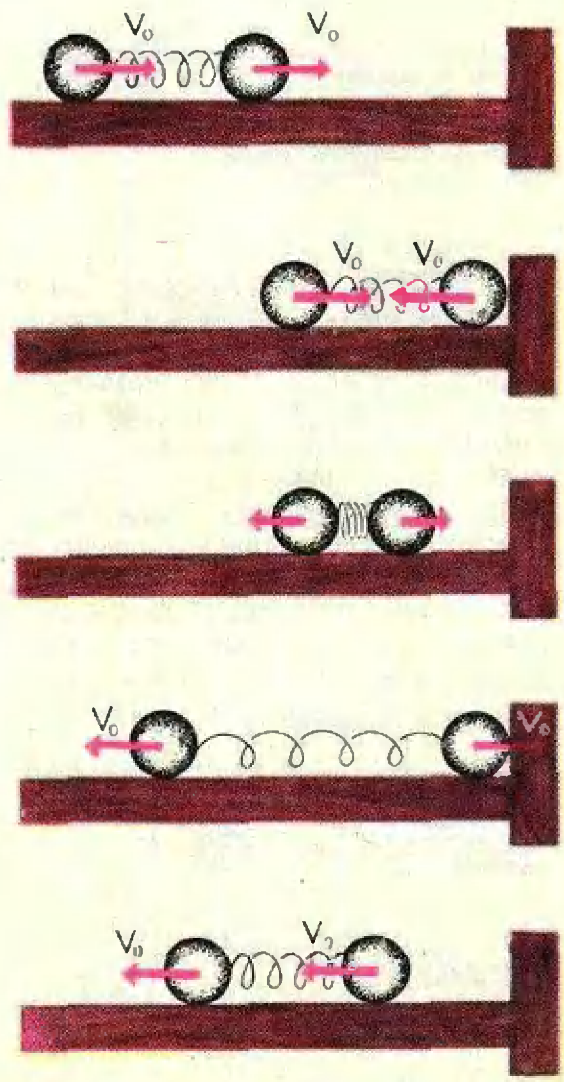


Рис. 14.

одинаковыми по величине скоростями (см. рис. 14), пружинка сжимается. Кинетическая энергия шариков переходит в потенциальную энергию деформации пружинки. Затем пружинка начинает распрямляться, сообщая шарикам одинаковые по величине и противоположные по направлению скорости. При этом, так же как и во время сжатия пружинки, центр масс системы неподвижен относительно стенки — на систему не действуют никакие горизонтальные силы. Из закона сохранения энергии следует, что в тот момент, когда правый шарик ударяется о стенку, величины скоростей шариков равны начальной скорости системы. После соударения шарика со стенкой его скорость опять меняется на противоположную и шарики движутся от стенки с одинаковыми скоростями. Так как в момент удара шарика о стенку пружинка не деформирована, то она не деформируется и при дальнейшем движении системы.

Ф58

В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если индукция поля меняется с высотой по закону

$$B = B_0(1 + \alpha H).$$

Сила, действующая на кольцо в магнитном поле, пропорциональна току, идущему по кольцу, ток пропорционален э. д. с. индукции, возбуждаемой в кольце при его движении, а э. д. с. индукции, в свою очередь, пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего плоскость кольца, а значит, пропорциональна скорости кольца. Следовательно, при некоторой скорости движения кольца сила, действующая на него в магнитном поле, станет равной силе тяжести. Эта скорость и является скоростью установившегося движения кольца.

Так как при движении кольца его кинетическая энергия не меняется, то изменение потенциальной энергии должно быть равно тепловым потерям в кольце.

Пусть скорость кольца равна v. Э. д. с. индукции, возбуждаемой в кольце при его движении, по величине равна

$$E = k\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий кольцо, и k — коэффициент пропорциональности.

$$\Phi = \frac{\pi d^2}{4}B = \frac{\pi d^2}{4}B_0(1 + \alpha H),$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi d^2}{4}B_0\alpha\frac{\Delta H}{\Delta t}.$$

Но $\frac{\Delta H}{\Delta t} = v$, поэтому

$$E = k\frac{\pi d^2}{4}B_0\alpha v$$

и по кольцу идет ток

$$I = \frac{E}{R} = \frac{k\pi d^2 B_0\alpha v}{4R}.$$

Запишем теперь закон сохранения энергии. Пусть масса кольца равна m.

За время t в кольце выделяется тепло, равное I^2Rt. Если за это время кольцо опускается на высоту h, то

$$mgh = I^2Rt.$$

Так как $\frac{h}{t} = v$, то

$$mgv = I^2R,$$

$$mgv = \frac{k^2\pi^2d^4B_0^2\alpha^2v^2}{16R}.$$

Отсюда

$$v = \frac{16Rmg}{k^2\pi^2d^4B_0^2\alpha^2}.$$

И. Ш. Слободецкий

Логарифмические уравнения

В. В. Гольдберг

Логарифмическими уравнениями принято называть уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком логарифма.

Решение простейшего логарифмического уравнения

$$\log_a x = b \tag{1}$$

основано на следующем свойстве логарифмов: *если логарифмы двух (положительных) чисел по одному и тому же основанию* $a (a > 0,\ a \neq 1)$ *равны, то равны и сами эти числа.*

Записав уравнение (1) в виде $\log_a x = \log_a a^b$ и воспользовавшись указанным свойством, получим ответ: $x = a^b$.

Этот прием применим и для решения более сложных логарифмических уравнений вида

$$\log_a f(x) = b. \tag{2}$$

Для уравнения (2) получаем $f(x) = a^b$.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\log_5 [2 + \log_3 (3 + x)] = 0.$$

Решение. Сначала получаем, что

$$2 + \log_3(3+x) = 5^0,\ 2 + \log_3(3+x) = 1,\ \log_3(3+x) = -1.$$

Далее находим: $3 + x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3} - 3$, $x = -\frac{8}{3}$.

Некоторые логарифмические уравнения легко сводятся к простейшим. Так, уравнения вида

$$f(\log_a x) = 0 \tag{3}$$

заменой $\log_a x = y$ сводятся к уравнению $f(y) = 0$. Если $y_1, \ldots, y_k$ — корни последнего уравнения, то мы получаем совокупность простейших логарифмических уравнений:

$$\log_a x = y_1,\ \ldots,\ \log_a x = y_k.$$

Пример 2. *Решить уравнение* $\lg^3 x - \lg^2 x - 6 \lg x = 0$.

Решение. Обозначим $\lg x$ через y. Тогда получим кубическое уравнение относительно y:

$$y^3 - y^2 - 6y = 0.$$

Решаем его: $y(y^2 - y - 6) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = -2$. Рассматриваем три возможных случая:

а) $\lg x = 0$, $x_1 = 1$; б) $\lg x = 3$, $x_2 = 1000$; в) $\lg x = -2$, $x_3 = 0{,}01$.

К уравнениям вида (3) сводятся показательно-логарифмические уравнения, если их предварительно прологарифмировать.

Пример 3. *Решить уравнение* $x^{2+\log_3 x}=3^8$.

Решение. Поскольку обе части уравнения положительны (ОДЗ: $x>0$), приравниваем их логарифмы по основанию 3: $\log_3 x^{2+\log_3 x}=\log_3 3^8$, откуда находим, что $(2+\log_3 x)\log_3 x=8$. Обозначая $\log_3 x$ через y, приходим к квадратному уравнению $y^2+2y-8=0$ с корнями $y_1=-4$, $y_2=2$. Разбираем два случая:

а) $\log_3 x=-4$, $x_1=1/81$ б) $\log_3 x=2$, $x_2=9$.

Пример 4. *Решить уравнение* $9x^{\lg x}+91x^{-\lg x}=60$.

Решение. Введем обозначение $x^{\lg x}=y$; тогда $x^{-\lg x}=\frac{1}{y}$, и наше уравнение сводится к следующему уравнению относительно y: $9y^2-60y+91=0$. Корни последнего $y_1=\frac{13}{3}$, $y_2=\frac{7}{3}$. Рассматриваем обе возможности:

а) $x^{\lg x}=\frac{13}{3}$; логарифмируя, получаем $\lg x^{\lg x}=\lg\frac{13}{3}$, $\lg^2 x=\lg\frac{13}{3}$, откуда $\lg x=\pm\sqrt{\lg\frac{13}{3}}$, $x_1=10^{\sqrt{\lg\frac{13}{3}}}$, $x_2=10^{-\sqrt{\lg\frac{13}{3}}}$;

б) $x^{\lg x}=\frac{7}{3}$; аналогично тому, как это сделано в первом случае, находим $x_3=10^{\sqrt{\lg\frac{7}{3}}}$, $x_4=10^{-\sqrt{\lg\frac{7}{3}}}$.

При решении логарифмических уравнений часто дело сводится к решению уравнения типа

$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \tag{4}$$

Здесь с помощью потенцирования надо перейти к уравнению

$$f(x)=g(x). \tag{5}$$

Но следует иметь в виду, что *при таком переходе мы расширяем ОДЗ уравнения, и потому возможно появление посторонних корней*. Поэтому надо проверить, входит ли каждый из корней уравнения (5) в ОДЗ уравнения (4).

Пример 5. *Решить уравнение* $\log_2(2x^2-2)=\log_2(5x-4)$.

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2-2>0, \\ 5x-4>0, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x<-1,\ x>1, \\ x>\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ: $x>1$. Потенцируя данное уравнение, получим $2x^2-2=5x-4$, или $2x^2-5x+2=0$, откуда находим $x_1=2$, $x_2=1/2$.

Поскольку $x_2=1/2$ не входит в ОДЗ, уравнение имеет только одно решение: $x=2$.

Хорошо известны следующие свойства логарифмов чисел:

$$\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B \ (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1), \tag{6}$$

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B \quad (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1), \tag{7}$$

$$\log_a A^p=p\log_a A \ (A>0,\ p \text{ — любое действительное число}), \tag{8}$$

$$\log_{a^q} A^p=\frac{p}{q}\log_a A \quad (A>0,\ q\neq 0). \tag{9}$$

Как следует применять эти свойства логарифмов при решении логарифмических уравнений, когда выражения A и B содержат неизвестное?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что ОДЗ левой и правой частей этих формул разные: например, правая часть формулы (6) имеет смысл только при $A>0$ и $B>0$, а левая часть этой формулы определена как при $A>0$ и $B>0$, так и при $A<0$, $B<0$.

Аналогично и для остальных формул *ОДЗ левой части может оказаться шире ОДЗ правой части* (при этом в формуле (9) надо рассматривать допустимые значения входящей в основание величины a. Сказанное означает, что если мы будем использовать формулы (6)—(9) «справа налево», то в результате будем получать уравнение, являющееся следствием исходного (его ОДЗ может оказаться шире). При этом мы гарантированы в том, что не потеряем корней. *Но в этом случае мы можем приобрести посторонние корни.* Поэтому все полученные корни надо проверить (если посторонние корни могли появиться только в результате использования формул (6)—(9), то достаточно проверить, входят ли полученные корни в ОДЗ исходного уравнения).

Пример 6. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+\log_{\frac{1}{6}}(5x+3)=-2. \qquad (10)$$

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 5x+3>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1, \\ x>-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ таково: $x>1$.

Применяя формулу (6) к левой части уравнения, получим

$$\log_{\frac{1}{6}}[(x-1)(5x+3)]=-2, \qquad (11)$$

откуда находим $(x-1)(5x+3)=36$, или $5x^2-2x-39=0$. Корни квадратного уравнения: $x_1=3$, $x_2=-13/5$.

Поскольку посторонние корни могли появиться только из-за использования формулы (6), достаточно проверить, входят ли полученные решения в ОДЗ уравнения (10). Сделав это, убеждаемся в том, что уравнение имеет единственное решение $x=3$. Заметим, что значение $x=-13/5$, не являясь решением уравнения (10), будет решением уравнения (11), ОДЗ которого шире: $x>1$, $x<-3/5$.

Как же быть, если при решении логарифмического уравнения мы сталкиваемся с необходимостью использовать формулы (6)—(9) «слева направо»? Ведь если эти формулы использовать в том виде, в каком мы их выписали, мы придем к уравнению, ОДЗ которого может оказаться у́же ОДЗ исходного уравнения! Но тогда мы можем потерять часть корней!

Чтобы этого не случилось, надо использовать более общие формулы:

$$\log_a(AB)=\log_a|A|+\log_a|B| \quad (AB>0, a>0,\ a\neq 1), \qquad (6')$$

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a|A|-\log_a|B| \quad (AB>0,\ a>0,\ a\neq 1), \qquad (7')$$

$$\log_a A^{2p}=2p\log_a|A| \quad (A\neq 0,\ p \text{ — целое число}), \qquad (8')$$

$$\log_{a^{2q}}A=\frac{1}{2q}\log_{|a|}A \quad (A>0,\ q\neq 0 \text{ — целое число}). \qquad (9')$$

Левые и правые части формул (6′) и (7′) так же, как и формул (6) и (7), имеют разные ограничения на A и B: левые части имеют смысл при A и B одинакового знака, а правые части — при любых ненулевых A и B.

Поэтому *использование формул* (6′) *и* (7′) *«слева направо» приведет к уравнению, ОДЗ которого может оказаться шире*. Но это уже менее страшно, чем сужение ОДЗ, ибо теперь мы не можем потерять корней, а можем лишь приобрести посторонние. Как мы уже отмечали, в этом случае становится необходимой проверка получаемых решений (иногда достаточно проверить, входят ли они в ОДЗ исходного уравнения).

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\lg (x+1)^2+\lg (x+9)^2=2\lg 9. \qquad (12)$$

Чтобы предотвратить часто встречающиеся ошибки, приведем сначала неправильное решение.

С помощью формул (8) находят, что $2\lg (x+1)+2\lg(x+9)=2\lg 9$, или

$$\lg (x+1)+\lg (x+9)=\lg 9. \qquad (13)$$

Применяя формулу (6), получают далее

$$\lg [(x+1)(x+9)]=\lg 9, \qquad (14)$$

откуда находят $(x+1)(x+9)=9$, или $x^2+10x=0$ и далее $x_1=0$, $x_2=-10$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению (12).

Дадим теперь правильное решение уравнения (12).

Решение. Находим ОДЗ уравнения (12): $x\neq-9, x\neq-1$. Используя формулу (7′), получим $2\lg|x+1|+2\lg|x+9|=2\lg 9$, откуда находим, что $\lg|(x+1)(x+9)|=\lg 9$ и далее $|x^2+10x+9|=9$.

Последнее равенство выполняется в любом из следующих случаев:

а) $x^2+10x+9=9$, $x^2+10x=0$, $x_1=0$, $x_2=-10$;

б) $x^2+10x+9=-9$, $x^2+10x+18=0$, $x_3=-5+\sqrt{7}$, $x_4=-5-\sqrt{7}$.

Таким образом, уравнение (12) имеет четыре корня.

Ошибка в приведенном выше неправильном решении, как вы уже, очевидно, догадались, заключалась в том, что применялась формула (8), а не (8′). Это привело к уравнению (13) с более узкой ОДЗ: $x>-1$. Правда, на следующем шаге это частично компенсировалось: ОДЗ уравнения (14) шире ОДЗ уравнения (13) — сюда входят как $x>-1$, так и $x<-9$. Последнее дало возможность не потерять корень $x_2=-10$, но корни $x_{3,4}=-5\pm\sqrt{7}$ оказались потерянными.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\lg [(x-2)(x+3)]+\lg [(x+3)/(x-2)]=1. \qquad (15)$$

Решение. Найдем ОДЗ: $(x-2)(x+3)>0$, или $x<-3$ и $x>2$.

Для решения используем формулы (6′) и (7′):

$$\lg|x-2|+\lg|x+3|+\lg|x+3|-\lg|x-2|=1.$$

Приведя подобные члены, получим $\lg|x+3|=1/2$, откуда находим:

$$|x+3|=\sqrt{10},\quad x+3=\pm\sqrt{10},\quad x_1=-3+\sqrt{10},\quad x_2=-3-\sqrt{10}.$$

Проверка показывает, что $x=-3-\sqrt{10}$ будет единственным решением уравнения (15).

При использовании формул (6) и (7) мы имели бы

$$\lg (x-2)+\lg (x+3)+\lg (x+3)-\lg (x-2)=1,$$

$$\lg (x+3)=\frac{1}{2},\quad x+3=\sqrt{10},\quad x=-3+\sqrt{10}.$$

При таком решении мы сначала сузили ОДЗ, что привело к потере корня $x=-3-\sqrt{10}$, а затем после уничтожения подобных членов расширили ОДЗ, что привело нас к постороннему корню $x=-3+\sqrt{10}$.

Еще одним источником появления посторонних корней является применение основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b}=b\ (b>0,\ a>0,\ a\neq 1) \qquad (16)$$

в том случае, когда a и b содержат неизвестное.

Пример 9. *Решить уравнение* $x^{\log_x(x^2+1)}=2$.

Решение. Используя тождество (16), получим $x^2+1=2$, откуда $x_1=-1$, $x_2=1$. Но значения $x=\pm 1$ не могут быть основанием логарифмов, то есть не входят в ОДЗ. Поэтому уравнение не имеет решений.

Если в уравнение входят логарифмы при разных основаниях, надо применять формулу перехода от одного основания логарифмов к другому:

$$\log_b A=\frac{\log_a A}{\log_a b} \qquad (A>0,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1) \qquad (17)$$

и ее частный случай

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \qquad (a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1). \qquad (18)$$

Пример 10. *Решить уравнение*

$$\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1.$$

Решение. Находим ОДЗ: $x>0,\ x\neq\frac{1}{3}$. Используя формулу (17), перейдем в первом слагаемом к основанию 3; тогда получим

$$\frac{\log_3\frac{3}{x}}{\log_3(3x)}+\log_3^2 x=1, \text{ или } \frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1.$$

Обозначим $\log_3 x$ через y, тогда уравнение примет вид

$$\frac{1-y}{1+y}+y^2=1 \quad \text{или} \quad y^3+y^2-2y=0,$$

откуда находим $y_1=0,\ y_2=-2,\ y_3=1$. Рассматриваем три возможности:

а) $\log_3 x=0,\ x_1=1$; б) $\log_3 x=-2,\ x_2=\frac{1}{9}$; в) $\log_3 x=1,\ x_3=3$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$20\log_{ax}\sqrt{x}+7\log_{a^2x}x^3=3\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x^2 \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

Решение. Находим ОДЗ: $x>0,\ x\neq\frac{1}{a},\quad x\neq\frac{1}{a^2},\quad x\neq\sqrt{a}$.

Поскольку $x>0$, мы можем применить формулу (8), что дает

$$10\log_{ax}x+21\log_{a^2x}x=6\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x.$$

Теперь удобнее всего по формуле (18) перейти к одному и тому же основанию x. Но когда x будет стоять в основании логарифмов, ОДЗ уравнения станет уже, так как x после этого не может быть равным единице. Поэтому, *прежде чем перейти к основанию x, проверим, не является ли $x=1$ корнем уравнения.* Легко видеть, что $x_1=1$ — корень. Перейдем теперь к основанию x:

$$\frac{10}{\log_x(ax)}+\frac{21}{\log_x(a^2x)}=\frac{6}{\log_x\dfrac{x}{\sqrt{a}}}.$$

Обозначим $\log_x a$ через y. Тогда получим

$$\frac{10}{1+y}+\frac{21}{1+2y}=\frac{6}{1-\dfrac{1}{2}y}.$$

После простых преобразований приходим к квадратному уравнению $13y^2-3y-10=0$, корни которого $y_1=1$, $y_2=-\frac{10}{13}$. В первом случае получаем $\log_x a=1$, $x_2=a$, а во втором $\log_x a=-\frac{10}{13}$, $x^{-\frac{10}{13}}=a$, $x_3=a^{-\frac{13}{10}}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=a^{-\frac{13}{10}}$.

При решении логарифмических уравнений иногда удобно пользоваться следующей формулой:

$$A^{\log_a B}=B^{\log_a A}\ (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1). \qquad (19)$$

Доказательство формулы (19) очень простое: поскольку обе части этой формулы положительны, найдем логарифмы по основанию a от $A^{\log_a B}$ и $B^{\log_a A}$. Нетрудно убедиться, что эти логарифмы равны одному и тому же выражению $\log_a A\log_a B$; из равенства логарифмов выводим справедливость формулы (19).

Пример 12. *Решить уравнение* $3^{\log_a x}+3x^{\log_a 3}=2$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. В силу (19) $x^{\log_a 3}=3^{\log_a x}$.

Поэтому уравнение можно записать в виде $3^{\log_a x}+3\cdot 3^{\log_a x}=2$, откуда находим, что $4\cdot 3^{\log_a x}=2$, то есть $3^{\log_a x}=\frac{1}{2}$. Далее имеем

$$\log_a x=-\log_3 2,\quad x=a^{-\log_3 2}.$$

Упражнения

Решить уравнения:

1. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$.
2. $x^{\log_x(x+3)^2}=16$.
3. $x^{\log_3^3 x-\log_3 x}=3^{3\log_{2\sqrt{2}}4+8}$.
4. $15^{\log_5 3}x^{\log_5(9x)+1}=1$.
5. $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$.
6. $\dfrac{1}{\log_6(3+x)}+\dfrac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1$.
7. $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2$.
8. $\log_{x/2}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.
9. $\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0$.
10. $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$.
11. $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$.
12. $\lg[x(x+9)]+\lg\dfrac{x+9}{x}=0$.

Задачи по геометрии

Ю. В. Сидоров

На приемных экзаменах в институтах много места уделяется задачам по геометрии. Условия большинства задач формулируются достаточно просто: в некоторой геометрической фигуре задается несколько элементов или соотношений между элементами и требуется найти неизвестный элемент или неизвестное соотношение между элементами.

Такие «стандартные» условия задач понятны каждому абитуриенту. Однако геометрические задачи и приемы их решений настолько разнообразны, что невозможно придумать какую-нибудь удобную классификацию, по которой можно было бы узнавать рецепт решения каждой конкретной задачи. Именно поэтому в учебниках и учебных пособиях почти нет описаний методов решения задач. Чтобы научиться решать геометрические задачи, нужно твердо знать и хорошо понимать основные теоремы геометрии и, главное, постоянно тренироваться, регулярно решать разнообразные задачи.

В последние годы большинство школьников решают геометрические задачи только «алгебраическим способом» который состоит в следующем. Неизвестные элементы геометрической фигуры обозначаются через x, y, $z, \ldots$, и выписываются несколько соотношений между известными и неизвестными элементами. Затем решается полученная система алгебраических и тригонометрических уравнений и находятся те элементы или соотношения между элементами, которые требуется найти по условиям задачи.

Такой формальный подход к решению геометрических задач часто является одним из самых простых и позволяет быстро получить ответ. Естественно, возникает желание решать таким способом все задачи. Однако абитуриент, который привык, не задумываясь, «переделывать» любую геометрическую задачу в алгебраическую, встречает непреодолимые трудности на приемных экзаменах, если оказывается, что его способ решения не приводит к желаемому результату.

Почти каждая задача может быть решена различными способами. Высоко оцениваются те работы абитуриентов, в которых найден наиболее короткий и изящный путь решения задач. Только большая и постоянная тренировка позволяет научиться находить самый рациональный способ решения. Удачный выбор неизвестных, удобный рисунок, дополнительные геометрические построения и аккуратное оформление решения помогают правильно понять задачу и найти самый простой способ ее решения. Рассмотрим конкретные примеры.

На письменном экзамене по математике в МФТИ была предложена следующая задача.

1. *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = \sqrt{3}\,MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)\,BO$. Найти углы треугольника ABC.*

Многие абитуриенты пытались решить эту задачу следующим образом.

Пусть $AB=a$, $\angle BAC=x$, $\angle ABC=y$ (рис. 1). Найдем длину отрезка AN из треугольника ABN (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника и по теореме синусов):

$$AN = AB\frac{NO}{BO} = a\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{a\sin\frac{y}{2}}{\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)}.$$

Аналогично из треугольника ABM находим:

$$BM=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)}.$$

Таким образом, получена система уравнений

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2},\\ \left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2}.\end{cases}$$

Большинство абитуриентов, которые решали задачу таким способом, не сумели найти решение этой довольно сложной системы. Но плохо не то, что они не решили полученную систему, а то, что они не пытались найти другой способ решения данной задачи. Эту задачу проще решить следующим способом (тоже алгебраическим).

Пусть $AB=x$, $BC=y$, $AC=z$. Из треугольников ABM и ABN по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника получаем

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MO}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{AN}{AB}=\frac{NO}{BO}=\sqrt{3}-1.$$

Отсюда $BM=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $AN=x\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Из треугольника ABC имеем:

$$\frac{AN}{CN}=\frac{AB}{BC},\qquad \frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC},$$

то есть

$$\begin{cases}\dfrac{x\left(\sqrt{3}-1\right)}{z-x\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{x}{y},\\ \dfrac{x}{y\sqrt{3}-x}=\dfrac{x}{z}.\end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим: $y=x\sqrt{3}$, $z=2x$. Отсюда следует, что $x^2+y^2=z^2$ и по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\angle BAC=\arcsin\frac{y}{z}=\frac{\pi}{3},$$

$$\angle ACB=\frac{\pi}{6}.$$

Рассмотрим еще одну задачу.

2. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC расположена точка M, а на стороне AC — точка N* такая, что $MN\parallel AB$. *Известно, что $AB=AN=1$ см, $CM=\sqrt{3}$ см. Найти длину отрезка MN.*

Естественно попытаться решить эту задачу следующим образом. Обозначим MN через x (рис. 2). Тогда $CN=\sqrt{3-x^2}$ и из подобия треугольников получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{1+\sqrt{3-x^2}}=x,$$

которое легко преобразуется к виду

$$x^4-2x^3-x^2+6x-3=0.$$

Найти решение этого уравнения трудно, и поэтому надо попытаться найти другой способ решения задачи. На-

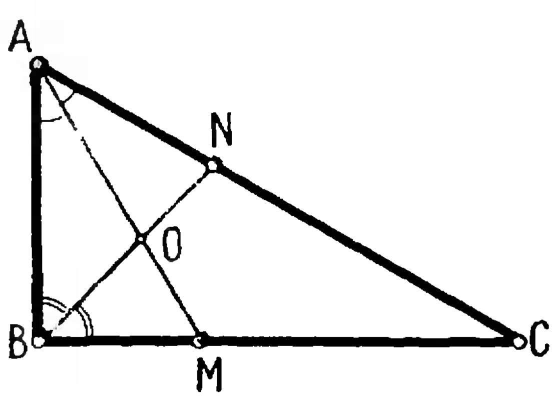


Рис. 1.

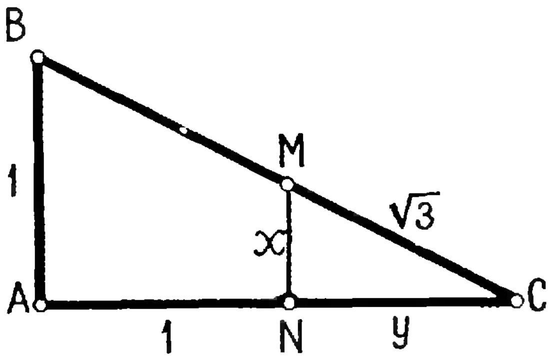


Рис. 2.

пример, задачу 2 можно решить следующим образом.

Обозначим MN через x, CN через y. Тогда легко получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \dfrac{y+1}{y}=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим:

$$y-x=xy, \quad x^2+y^2-2xy=x^2y^2.$$

Вычитая из этого уравнения первое уравнение системы, получаем:

$$(xy)^2+2xy-3=0, \qquad xy=-1\pm 2.$$

Учитывая, что $x>0$, $y>0$, получаем систему

$$\begin{cases} xy=1, \\ y-x=1, \end{cases}$$

из которой находим ответ:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \ (см).$$

Из рассмотренных примеров видно, как удачный выбор неизвестных

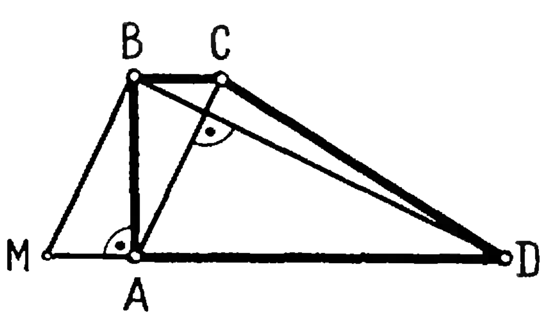


Рис. 3.

величин помогает упростить решение геометрической задачи алгебраическим способом. Приведем примеры задач, для решения которых полезно сделать дополнительные геометрические построения.

3. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, диагонали взаимно перпендикулярны и $\frac{AD}{BC}=k$. Найти отношение $\frac{BD}{AC}$.*

Решение. Через точку B проведем прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с прямой AD в точке M (рис. 3). Тогда по теореме о свойстве перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольника BMD, имеем

$$BD=\sqrt{DM\cdot AD},$$

$$BM=\sqrt{DM\cdot AM}.$$

Учитывая, что $AC=BM$, $AM=BC$, находим

$$\frac{BD}{AC}=\frac{BD}{BM}=\frac{\sqrt{DM\cdot AD}}{\sqrt{DM\cdot AM}}=\sqrt{\frac{AD}{BC}}=\sqrt{k}.$$

4. *На сторонах AC и BC треугольника ABC расположены соответственно точки N и M так, что*

$$\frac{AN}{CN}=n, \quad \frac{BM}{CM}=m.$$

Прямые AM и BN пересекаются в точке O.

Найти отношения

$$\frac{AO}{MO} \ \text{и} \ \frac{BO}{NO}.$$

Решение. Проведем $MK \| BN$ (рис. 4). Из подобия треугольников BCN и CKM находим CK:

$$CK=CN\frac{CM}{BC}=CN\frac{CM}{CM+BM}=$$
$$=CN\frac{1}{1+m}.$$

Следовательно,

$$KN=CN-CK=CN\left(1-\frac{1}{1+m}\right)=$$
$$=CN\frac{m}{1+m}.$$

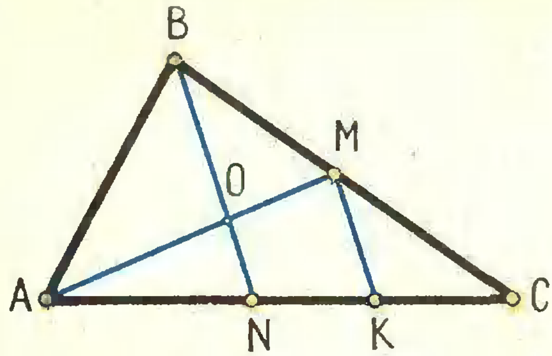


Рис. 4.

Из подобия треугольников AON и AMK находим искомые отношения:

$$\frac{AO}{MO}=\frac{AN}{KN}=\frac{AN}{CN}\cdot\frac{1+m}{m}=\frac{n}{m}(1+m),$$

и аналогично

$$\frac{BO}{NO}=\frac{m}{n}(1+n).$$

Упражнения

1. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, B, центр грани ACD и середину ребра BC.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D так, что $AD=a$, $CD=b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти длину MN.

3. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны a и c соответственно. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины B.

4. В остроугольном треугольнике две высоты равны соответственно 3 *см* и $2\sqrt{2}$ *см*, а точка их пересечения делит третью высоту в отношении $5:1$, считая от вершины треугольника. Найти площадь треугольника.

5. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Некоторая плоскость пересекает все боковые ребра призмы так, что в сечении получается правильный треугольник. Определить сторону этого треугольника.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

СОЖЖЕННАЯ РАДУГА

Каждый видел радугу и почти каждый может более или менее подробно объяснить ее происхождение. Этим никого не удивишь. Но мало кто знает, что первое объяснение радуги можно найти в заметках Леонардо да Винчи (1452—1519). Видимо, об этом не знали и отцы-инквизиторы, которые более чем через 100 лет в 1624 году преследовали епископа Антонио Доминика за книгу, в которой он объяснил происхождение радуги. Епископ не был сожжен на костре инквизиции только потому, что умер в тюрьме, но книга его и тело автора все же претерпели знаменитое аутодафе.

Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году

Н. Н. Колесников, В. М. Тихомиров

В 1970 году на химическом факультете МГУ по математике проводился только письменный экзамен.

Каждый вариант письменной работы содержал пять задач, охватывающих все основные разделы школьного курса математики — алгебру, геометрию и тригонометрию.

Разобрав четыре задачи одного из вариантов, мы увидим, что для их решения не требуется никаких знаний, выходящих за рамки программы по математике для поступающих в вузы.

В связи с этим хотелось бы еще раз подчеркнуть, что у поступающих зачастую слабы навыки здравых логических рассуждений и что ими уделяется явно недостаточное внимание геометрическим задачам и теоремам.

Наряду с этими двумя принципиальными недочетами, на которые хотелось бы обратить внимание и учителей, большой вред поступающим наносит небрежность и несобранность при выполнении и оформлении письменной работы, неумение доводить решения задач и примеров до конца. Задача, в которой только намечена идея решения, но не доведенная с необходимыми промежуточными рассуждениями до ответа, не может считаться решенной до конца. Небрежность приводит также к разнообразным ошибкам и опискам, искажающим ход решения и результаты; иногда неправильно понимаются условия задачи, но задача с измененными условиями экзаменационной комиссией не рассматривается, даже если она оказывается более трудной.

Вариант

1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал $^3/_5$ всего пути от B до A? (Скорости автомобиля и велосипедиста постоянны.)

2. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

3. Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1<x<4$ и удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,75}\sin x\geqslant\log_{9/16}0,75.$$

4. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную $120°$. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD=2$, $BD=1$, $CD=\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Дана прямая трехугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC=6$, а $AA_1=8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM=MB_1$, а AN — биссектриса угла CAC_1.

Разбор задач

1. В этой задаче мы укажем лишь основные моменты решения.

Пусть S — расстояние между пунктами A и B, $v_а$ — скорость автомобиля, $v_в$ — скорость велосипедиста, t — время (в часах) от начала движения до первой встречи. Для четырех введенных величин (S, $v_а$, $v_в$, t) можно составить три уравнения:

$$(v_а+v_в)t=S,$$

$$\frac{2}{5}S=v_в(t+2),\quad \frac{7}{5}S=v_а(t+2).$$

Найти значения всех неизвестных невозможно, но это и не требуется, нужно найти величину $\frac{S}{v_в}-t$, являющуюся комбинацией неизвестных. Деля третье уравнение на второе, мы получаем, что $v_а=\frac{7}{2}v_в$. Подставив это соотношение в первое уравнение и исключая $\frac{S}{v_в}$ из него и второго уравнения, мы находим $t=\frac{5}{2}$ часа. Из второго уравнения получится, что $\frac{S}{v_в}=\frac{45}{4}$ часа, а искомое время $\frac{S}{v_в}-t$ равно $\frac{35}{4}$ часа, то есть 8 часам 45 минутам.

Заметим, что эта задача (как и вообще все первые задачи в вариантах, дававшихся на химическом факультете) является по сути своей арифметической и допускает решение, основанное на самых простых рассуждениях.

За одно и то же время (до второй встречи) велосипедист проехал $^2/_5$, а автомобилист — $^7/_5$ всего пути. Значит, отношение их скоростей равно 2 : 7. Тогда к моменту первой встречи велосипедист проедет $^2/_9$, а автомобилист $^7/_9$ всего пути. Но, затратив еще два часа, велосипедист проезжает $^2/_5$ всего пути. Следовательно, за час он проезжает $\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right):2=\frac{4}{45}$ части всего пути. Значит, $^7/_9$ пути, которые еще предстояло проехать велосипедисту после первой встречи, он преодолеет за $7:\frac{4}{45}=\frac{35}{4}$ часа.

Представляется несколько удивительным, что безукоризненное решение этой задачи, достаточно простой, дали лишь 139 из 394 решавших ее абитуриентов — чуть больше трети, а почти половина — 182 из 394 — не высказала никаких разумных соображений по поводу этой задачи.

2. Эта задача оказалась наиболее доступной для поступавших, поэтому приведем лишь ответ: $x=1$ или $x=-\frac{1}{3}$.

3. Разбор третьей задачи мы начнем с определения ОДЗ с учетом дополнительного условия: $-1<x<4$. Мы видим, что ОДЗ состоит из тех x для которых $\sin x>0$, то есть

$2k\pi<x<\pi+2k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$),

что с учетом дополнительного неравенства дает условие

$$0<x<\pi.$$

Используя равенства $0{,}75=\frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{9}{16}}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, перепишем исходное неравенство так:

$$\log_{\frac{3}{4}}\sin x\geqslant\frac{1}{2},$$

откуда следует, что

$$\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, мы должны найти те x из интервала $0<x<\pi$, для которых $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. В итоге мы получаем ответ:

$$0<x\leqslant\frac{\pi}{3},\quad \frac{2}{3}\pi\leqslant x<\pi.$$

Третья задача обнаружила недостаточное понимание многими абитуриентами тригонометрических функций. Многие затруднялись в решении неравенства $\sin x>0$. Только четвертая часть всех решавших смогла правильно выписать решение неравенства $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ при дополни-

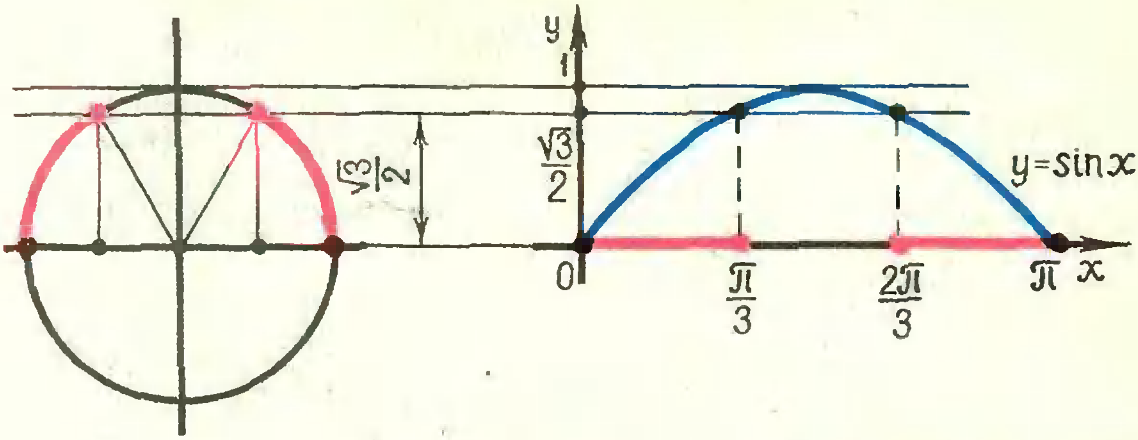


Рис. 1. Значения x, отмеченные красным цветом, являются решением исходной системы неравенств (слева на тригонометрическом круге, справа — на оси Ox).

тельном условии $0 < x < \pi$, которое проще всего получить из рисунка 1.

4. Эта задача оказалась самой трудной в варианте. Приведем одно из нескольких возможных алгебраических решений задачи.

На рисунке 2 мы обозначили через K середину отрезка AB, через E — основание высоты, опущенной из C на AB; длину CE мы обозначили через x, длину EK через y. Имеем

$S_{\Delta ABC} =$

$$= \frac{1}{2}x\cdot AB = \frac{1}{2}x(AD+DB) = \frac{3}{2}x.$$

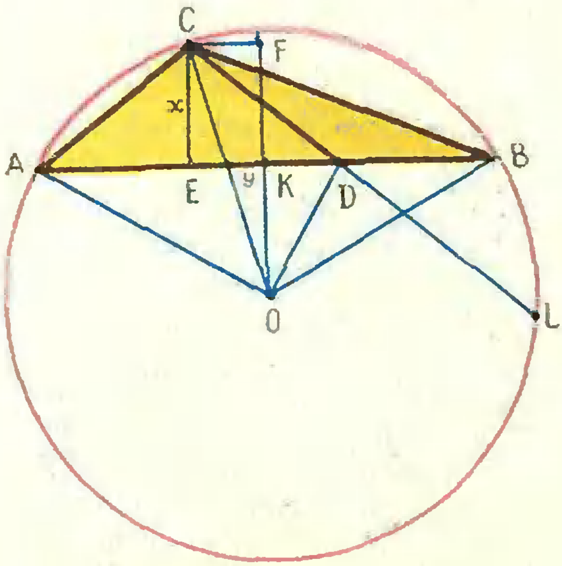


Рис. 2. $\angle ACB = 120°$, $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$.

Осталось найти x. Опустим перпендикуляр из точки C на продолжение отрезка OK и его основание обозначим через F. По построению $CFKE$ — прямоугольник, следовательно, $CF = EK = y$, $AK = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$, откуда $DK = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Из прямоугольного треугольника CED получаем первое уравнение

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = CD^2 = 2.$$

Второе уравнение получим из треугольника COF. Для этого найдем $R = CO$ и $KO = \sqrt{OB^2 - KB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$, а из треугольника AOB получим $2R\sin 60° = AB = 3$. Отсюда $R = \sqrt{3}$, $KO = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь из треугольника COF $(KO + KF)^2 + CF^2 = R^2$ или $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x\right)^2 + y^2 = 3$.

Исключая из полученной системы y, находим высоту и площадь

$$x = CE = \frac{\sqrt{2}}{2},\ S = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Используя рисунок 2, попробуйте найти геометрическое решение этой задачи.

5. Пусть $\angle CAC_1 = 2\alpha$ (рис. 3). Согласно условиям $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$. Поскольку AN — биссектриса угла $\angle CAC_1$, по известным тригонометрическим формулам легко найти, что ($\angle NAC = \alpha$)

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Обозначим $\angle ACB$ в треугольнике CAB через β. Теперь легко записать объем данной призмы следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} AC\cdot CB \sin\beta \cdot AA_1 = 24CB\sin\beta.$$

Плоскость, проходящая через точки A, M и N, отсекает от призмы пирамиду $ABCNM$, у которой боковая грань ACB перпендикулярна основанию, так как призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая (по условию). Основание $BCNM$ представляет собой трапецию, поскольку стороны CN и BM параллельны. Из равенств

$$BM = \frac{BB_1}{2} = 4, \quad CN = AC\cdot \operatorname{tg}\alpha = 3$$

находим: $S_{BCNM} = \frac{7}{2} BC$ (BC перпендикулярна CN и BM и является высотой трапеции). Объем пирамиды $ABCNM$, поэтому равен

$$V = \frac{1}{3} S_{BCNM}\cdot AC\sin\beta = 7CB\sin\beta.$$

Объем другой части, отсекаемой плоскостью от призмы, есть разность объемов призмы и пирамиды: $V_2 = V - V_1$. Отсюда

$$V_1 : V_2 = V_1 : (V - V_1) = 7 : 17.$$

В этой задаче не понадобилось находить численные значения объемов интересующих нас частей призмы, поскольку требовалось лишь их отношение. Для получения ответа достаточно было их выразить через одни и те же, хотя и неизвестные нам, величины BC и β. Однако именно это обстоятельство не было понято частью поступающих, которые упорно пытались найти численные значения нужных объемов и, конечно, не добились успеха (сравните с ситуацией в первой задаче, где тоже достаточно было для получения ответа найти отношение неизвестных).

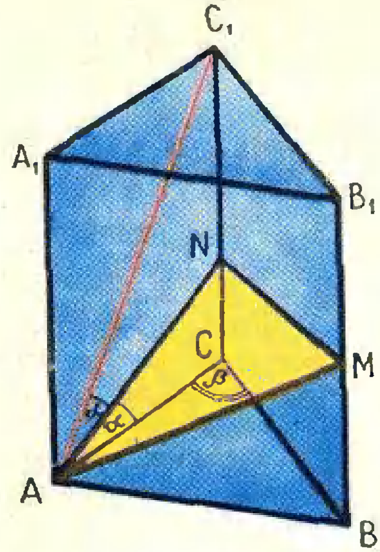


Рис. 3. $AC = 6$, $AA_1 = 8$, $BM = MB_1$.

Попробуйте решить сами следующий вариант.

1. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали одновременно, и каждый вспахивает свою половину. Через 5 часов после того момента, когда они совместно вспахали половину всего поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать $^1/_{10}$ часть своего участка, а второму — $^4/_{10}$ своего участка. Сколько времени понадобится второму трактору, чтобы одному вспахать все поле?

2. Решить уравнение

$$3^{2\sqrt{x^2+3x}+1} + 9 = 28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}.$$

3. Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 5$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0,5}\sin x \geq \log_2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$.

4. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а радиус круга, описанного вокруг этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 2DB$, и при этом $CD = 2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Дана трехугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра). Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC соответственно в точках M, N, P. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $B_1M : A_1B_1 = 1 : 2$, $B_1N : B_1C_1 = 2 : 3$ и $BP : CB = 1 : 3$.

Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году

В. Е. Белонучкин, С. М. Козел

Письменный вступительный экзамен по физике проводится далеко не во всех вузах. Однако задачи, предлагавшиеся на письменной работе, интересны и тем, кто собирается сдавать только устный экзамен. Здесь мы разберем задачи одного из вариантов письменной работы по физике на вступительном экзамене в Московском физико-техническом институте.

Билет № 6

1. Частица массы m, движущаяся со скоростью v, налетает на покоящуюся частицу массы $\frac{m}{2}$ и после упругого удара отскакивает под углом $\alpha=30°$ к направлению своего первоначального движения. С какой скоростью начнет двигаться вторая частица?

2. В стальном баллоне содержится 0,2 *г* водорода и 3,2 *г* кислорода при температуре 27° С. Водород соединяется с кислородом, и после того, как реакция закончилась, давление внутри баллона увеличилось в три раза. Какова будет при этом температура внутри баллона?

3. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предельное измеримое напряжение в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает пределы измерения в m раз. Во сколько раз увеличится предельное измеримое вольтметром напряжение, если включить последовательно с вольтметром эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

4. Астрономическая камера для фотографирования Солнца имеет объектив с фокусным расстоянием $F=10$ *м*. Перед объективом расположена круглая диафрагма диаметра $d=5$ *см*. Применяемая фотопленка имеет чувствительность $W=10$ *люкс·сек*. Каким должно быть при этих условиях время экспозиции τ? Известно, что прямые солнечные лучи создают на перпендикулярной к ним площадке освещенность $E=4\cdot10^4$ *люкс*. Угловой диаметр Солнца α принять равным 0,01 *рад*.

Рассмотрим решения этих задач.

1. При упругом ударе сохраняются количество движения и кинетическая энергия соударяющихся тел. Однако нельзя записывать закон сохранения количества движения в скалярном виде:

$$mv=\frac{m}{2}v_1+mv_2.$$

Такая запись верна, если обе частицы после удара движутся по той же прямой, по которой двигалась до удара налетающая частица, то есть при центральном ударе. В нашем случае, как видно из условия задачи, удар был нецентральным. Следовательно, надо учитывать, что количество движения — величина векторная и складывается по правилам сложения векторов (рис. 1).

Воспользовавшись теоремой косинусов, можно записать закон сохранения количества движения в виде

$$\left(\frac{m}{2}v_1\right)^2=$$
$$=(mv)^2+(mv_2)^2-2(mv_2)(mv)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где через v_1 обозначена скорость частицы с массой $\frac{m}{2}$, а через v_2 — скорость частицы с массой m. Кроме того, используем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_2^2}{2}+\frac{mv_1^2}{4}.$$

Исключая из этих уравнений v_2, найдем

$$v_1=\frac{2}{\sqrt{3}}v.$$

Векторный характер количества движения можно учесть и иначе. Введем взаимно перпендикулярные оси координат x и y.

Для проекций количества движения на такие оси выполняются скалярные соотношения

$$mv_{2y}+\frac{m}{2}v_{1y}=0,$$

$$mv_{2x}+\frac{m}{2}v_{1x}=mv.$$

Закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{mv^2}{2}=m\frac{v_{2y}^2+v_{2x}^2}{2}+\frac{m}{2}\,\frac{v_{1x}^2+v_{1y}^2}{2}.$$

Решив эту систему и учтя очевидное соотношение $v_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}$, получим тот же ответ.

2. Многие поступавшие считали, что слова «реакция закончилась» означают, что в баллоне образовалось 3,4 *г* воды. Однако из условия задачи следует, что в баллоне имеется избыток кислорода, так как для образования 1 *г-моля* воды необходимы 1 *г-моль* водорода и только $^1/_2$ *г-моля* кислорода. Пусть m_1 и m_2 — массы

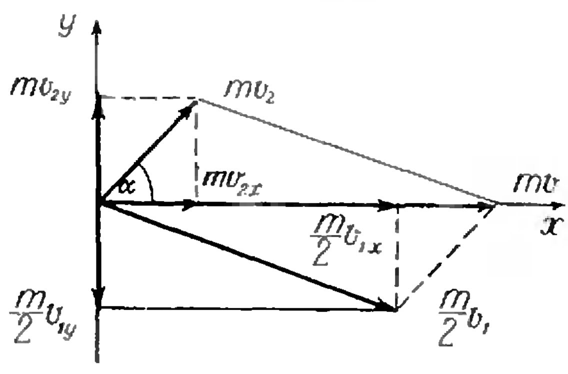


Рис. 1.

водорода и кислорода, μ_1 и μ_2 — их молекулярные веса. До реакции в баллоне было $\frac{m_1}{\mu_1}$ молей водорода и $\frac{m_2}{\mu_2}$ молей кислорода. После реакции в сосуде образовалось $\frac{m_1}{\mu_1}$ молей воды (весь водород прореагировал, число молей воды равно числу молей водорода). При этом на образование воды ушло $\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}$ молей кислорода, и, следовательно, в баллоне осталось $\frac{m_2}{\mu_2}-\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}$ молей кислорода.

Применяя теперь закон газового состояния и закон Дальтона к газам до и после реакции, можно записать:

$$P_1V=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)RT_1;$$

$$P_2V=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}-\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}\right)RT_2.$$

Следовательно,

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{T_2}{T_1}\left(1-\frac{\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}}{\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}}\right)=$$

$$=\frac{T_2}{T_1}\left(1-\frac{\frac{1}{2}\cdot 0,1}{0,2}\right)=\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{3}{4}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{P_2}{P_1}=3$, получаем

$$T_2=T_1\cdot 4=1200^\circ\ \text{K}.$$

3. Большинство неверных решений этой задачи связано с отсутствием у решавших четкого представления о роли добавочного сопротивления. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Обозначим сопротивление вольтметра r, максимальное напряжение на вольтметре U_0 и ток, текущий через вольтметр при этом напряжении, I_0 (рис. 2). При использовании добавочного сопротивления R_g измеряемое напряжение U_s распределяется между r и R_g пропорционально их величинам. Напряжение на вольтметре U, конечно, по-прежнему не должно превышать U_0, а измеряемое напряжение U_s может быть и больше U_0. Ток

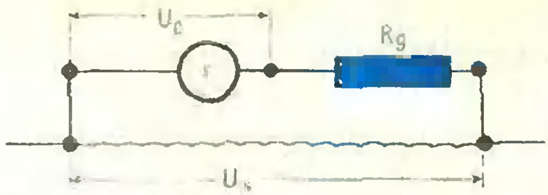


Рис. 2.

через вольтметр и R_g при этом не будет превышать I_0.

Исходя из этих соображений, для трех случаев, описанных в задаче, имеем:

$$I_0(R_1+r)=nU_0,$$
$$I_0(R_2+r)=mU_0,$$
$$I_0\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+r\right)=kU_0.$$

Здесь R_1 и R_2 — добавочные сопротивления, а k — искомая величина. Учитывая, что $I_0r=U_0$, эти уравнения можно преобразовать к виду:

$$R_1+r=nr,$$
$$R_2+r=mr,$$
$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+r=kr.$$

Из первых двух уравнений выразим R_1 и R_2. Подставляя их в третье, получим

$$k=\frac{mn-1}{m+n-2}.$$

4. Диаметр изображения Солнца на фотопленке равен $D=\alpha F$. Освещенность изображения можно найти,

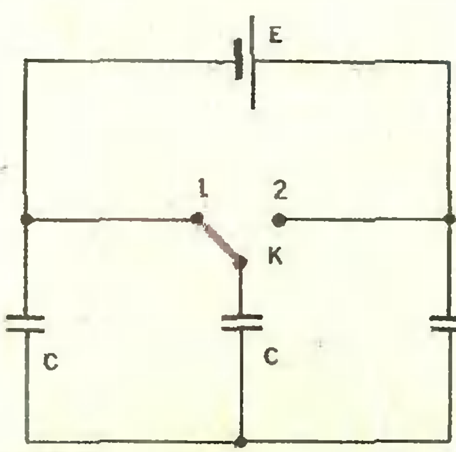


Рис. 3.

приняв во внимание, что вся световая энергия, проникающая через объектив, распределяется по площади изображения (потерями света мы пренебрегаем):

$$E_{изобр}D^2=Ed^2,$$

или

$$E_{изобр}=E\frac{d^2}{\alpha^2F^2}=10^4\ люкс.$$

Время экспозиции найдем из условия: $E_{изобр}\tau=W$.

Отсюда

$$\tau=\frac{W}{E_{изобр}}=10^{-3}\ сек.$$

Предлагаем вам решить самостоятельно следующий вариант.

1. Водометный катер забирает забортную воду и выбрасывает ее назад со скоростью V относительно катера. При этом он движется со скоростью v. К катеру на длинном тросе прицепили буксируемое судно, сила сопротивления которого при одинаковой скорости движения равна сопротивлению катера. Определить скорость буксира, если известно, что силы сопротивления катера и буксируемого судна изменяются пропорционально их скоростям.

2. Баллон с гелием при давлении гелия в 65 *ат* при температуре $-3°$ С весит 21 *кг*, а при давлении в 20 *ат* при той же температуре весит 20 *кг*. Сколько гелия содержал баллон при начальном давлении 150 *ат* и температуре 27° С?

3. Какое тепло выделится в цепи (см. рис. 3) при переключении ключа K из положения *1* в положение *2*?

4. На спутнике, летящем по круговой орбите на высоте $H=100$ *км*, расположен фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=10$ *см*. Фотографируется поверхность Земли под спутником. Разрешающая способность пленки (то есть минимальный размер видимых деталей изображения, определяемый зернистой структурой фотоэмульсии) $d=10^{-2}$ *мм*. Каков минимальный размер фотографируемых предметов? Какую следует выбирать выдержку (время экспозиции τ), чтобы орбитальное движение спутника не влияло на качество изображения?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Логарифмические уравнения»

1. $x_1 = \log_3 28 - 3$, $x_2 = \log_3 10$.

2. Нет решений.

3. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Указание. Прологарифмировать обе части по основанию 3.

4. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{15}$.

5. $x = 37$. Указание. Воспользуйтесь формулой (6).

6. $x = 3$.

7. Нет решений.

8. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 1$.

Указание. Выделите корень $x_1 = 1$ и перейдите к основанию x.

9. $x_1 = 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}$, $x_2 = 10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}$.

Указание. Перейдите к основанию 10.

10. $x = 625$. Указание. Примените формулу (19).

11. $x_1 = -11$, $x_2 = 1$,

$$x_3 = -5 + \sqrt{14},\quad x_4 = -5 - \sqrt{14}.$$

Указание. Используйте формулу (8′).

12. $x = -10$. Указание. Воспользуйтесь формулами (6′) и (7′).

К статье «Задачи по геометрии»

1. $\frac{a}{2}$.

2. $\frac{|a-b|}{2}$.

3. $\sqrt{ac}$.

4. 6 $см^2$.

5. $\left[\frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$.

6. 1 : 3.

К статье «Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году»

1. 50 часов.

2. $x = -4$ или $x = 1$.

3. $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$.

4. $3\sqrt{2}$. 5. 7 : 29.

К статье «Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году»

1. $V_1 = \frac{Vv}{2V - v}$.

2. $m = \Delta m \frac{P}{P_1 - P_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} = 3$ *кг*.

3. При переключении ключа произойдет перераспределение зарядов в системе конденсаторов. Работа батареи определяется произведением протекшего через нее заряда на э.д.с. Эта работа, вообще говоря, может быть затрачена частично на увеличение энергии конденсаторов, частично на выделение тепла в цепи. В нашей схеме емкость не меняется (в обоих случаях к двум одинаковым конденсаторам, соединенным параллельно, присоединен последовательно один конденсатор такой же емкости). Напряжение на системе конденсаторов тоже неизменно и равно E. Следовательно, энергия системы не изменяется, и вся произведенная работа переходит в тепло.

Для подсчета этой работы необходимо определить заряд, протекший через батарею. Проще всего это сделать, проследив за зарядом на левом конденсаторе. До переключения на этом конденсаторе находилась половина заряда системы, то есть $\frac{1}{3}CE$ (емкость системы равна $\frac{2}{3}C$).

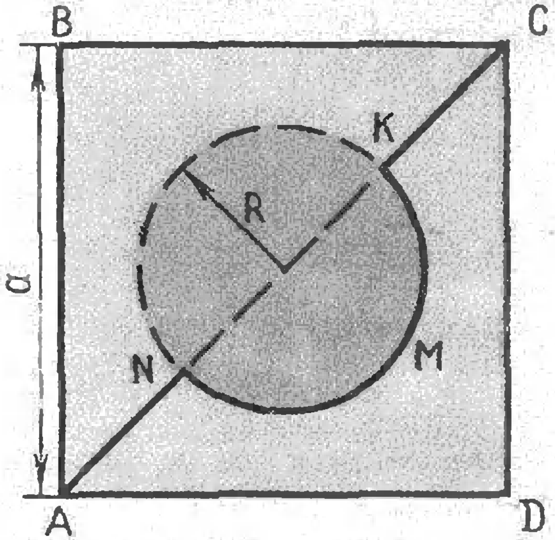
После переключения заряд удвоится. Значит, через батарею протечет заряд $\frac{1}{3}CE$ и батарея произведет работу $\frac{1}{3}CE^2$. Эта работа перейдет в тепло, которое выделится в цепи (в соединительных проводах, контактах и на внутреннем сопротивлении батареи).

4. Будем условно полагать, что минимальный размер фотографируемых предметов может быть найден из условия: размер изображения таких предметов равен разрешающей способности пленки, то есть

$$l_0 = d\,\frac{H}{F} = 10\ м.$$

Из аналогичных соображений можно определить допустимое время экспозиции: за это время спутник должен пролететь расстояние, не превышающее размера фотографируемого предмета: $\tau_0 = \frac{l}{v_0}$.

Здесь через v_0 обозначена первая космическая скорость, приближенно равная 8 *км/сек*. Подставляя числовые значения, получаем: $\tau_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ *сек*.



К заметке «Заспорили два друга»

(см. «Квант» № 5, стр. 39)

Первый путь — через сквер — имеет длину (см. рисунок)

$$AC - KN + \smile NMK. \qquad (1)$$

Второй путь — в обход сквера — имеет длину

$$AD + DC. \qquad (2)$$

В обозначениях Васи это выглядит так:

$$a\sqrt{2} - 2R + \pi R, \qquad (1')$$

$$a + a. \qquad (2')$$

По смыслу задачи $R \leqslant \frac{a}{2}$, откуда легко вывести неравенство

$$a\sqrt{2} - 2R + \pi R < 2a. \qquad (3)$$

В самом деле, преобразуя неравенство (3), получаем соотношение

$$(\pi - 2)R < (2 - \sqrt{2})\,a$$

или

$$\frac{R}{a} < \frac{2-\sqrt{2}}{\pi - 2}.$$

И так как $R \leqslant \frac{a}{2}$, то $\frac{R}{a} \leqslant \frac{1}{2}$. Но

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\pi-2} \approx \frac{2-1{,}414}{3{,}142-2} = \frac{0{,}586}{1{,}142} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, и подавно

$$\frac{R}{a} < \frac{2-\sqrt{2}}{\pi-2}.$$

(Значит, Петя действительно просто шел быстрее.)

Однако без вычислений здесь обойтись трудно, так как теорема о длине объемлющей и объемлемой применима только для выпуклых фигур. В нашем же случае линия $ANMKC$ не является выпуклой.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев *(зам. главного редактора)*, В. П. Лишевский, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский *(зам. главного редактора)*, Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор Т. А. Панькова

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/II 1971 г.
Подп. в печать 29/IV 1971 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,14.
Тираж 288 115 Т-06665
Цена 30 коп. Заказ 329.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ГАЛИЛЕЮ

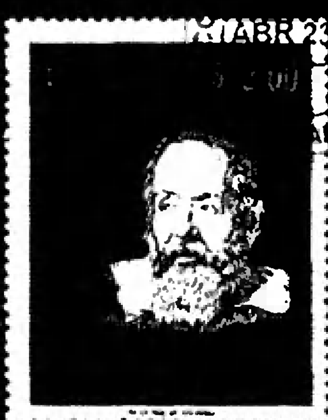
В 1964 году человечество отмечало 400-летие со дня рождения знаменитого итальянского астронома, физика и механика Галилео Галилея (1564—1642). Ему посвящен ряд почтовых марок; особенно много их выпущено к юбилею ученого.

Галилей ввел описание данных эксперимента на языке математики. Ему принадлежит доказательство закона падения тел, открытие замечательного свойства маятника (период колебания при малых амплитудах не зависит от амплитуды). Услышав, что в Голландии изобретена зрительная труба, он сам сконструировал и изготовил телескоп, который давал 32-кратное увеличение. В свой телескоп Галилей наблюдал Луну, планеты и звезды. Он увидел, что Млечный путь состоит из отдельных звезд, на Луне имеются горы, вокруг планеты Юпитер вращаются четыре спутника.

Галилей страстно отстаивал систему Коперника, которая все больше подтверждалась его наблюдениями. В 1632 году он издал свое знаменитое сочинение о строении Вселенной «Диалог о двух системах мира — птолемеевой и коперниковой».

Учение Галилея, так же, как и учение Коперника, противоречило учению церкви. Больной Галилей был вызван на суд инквизиции. Под угрозой пыток он вынужден был отречься от своих «заблуждений и ересей» и предать их проклятью. Но и после отречения полуслепой старик до самой своей смерти находился под домашним арестом. Однако, несмотря на отречение, Галилей не потерял веры в настоящую науку.

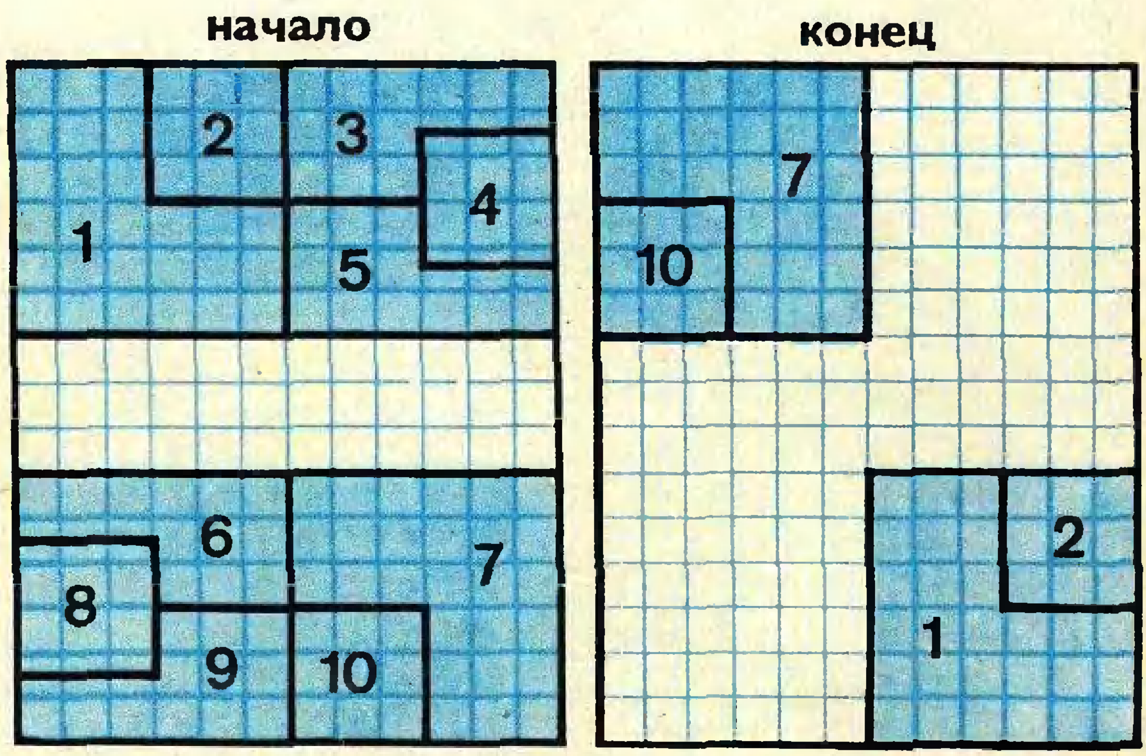
На фотографии вы видите некоторые марки, посвященные великому ученому.



Цена 30 коп.
Индекс 70465

10-6

Квант 6



ИГРА ЭСКОТТА

Эта задача была предложена в августе 1938 года американским математиком Эдвардом Бриндом Эскоттом. Задача заключается в перемещении блоков по одному в прямоугольнике до тех пор, пока блоки 1 и 2 не поменяются местами с блоками 7 и 10 так, как показано на рисунке. Вращать блоки не разрешается, даже если для этого есть место. Самое короткое из известных решений содержит 66 ходов. Напишите нам, если сумеете решить задачу короче.